Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 47(2013)2, páginas 149-165

Descripción de la clase de Nikolskiĭ-Besov disminuyendo su parámetro de suavidad, mediante derivadas fraccionarias débiles

Description of the Nikolskiĭ-Besov Class Decreasing its Smoothness Parameter using Weak Fractional Derivatives

Francisco Enríquez[a], Jhon Pérez[a,✉]

Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

Resumen. Los espacios de Nikolskiĭ-Besov $\mathcal{B}^{\alpha}_{pq}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{B}^{\alpha}_{pq}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, se han descrito recientemente con ayuda de las derivadas fraccionarias de Caputo. Usando el concepto de derivada fraccionaria débil, en el presente trabajo se reduce la caracterización de $\mathcal{B}^{\alpha}_{pq}$ al caso $\mathcal{B}^{\gamma}_{pq}$, donde γ es cualquier número positivo estrictamente menor que α.

Palabras y frases clave. Espacios de Nikolskiĭ-Besov, derivada fraccionaria, núcleo de Poisson, integral de Poisson.

2010 Mathematics Subject Classification. 26A33, 26A16..

Abstract. The Nikolskiĭ-Besov spaces $\mathcal{B}^{\alpha}_{pq}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{B}^{\alpha}_{pq}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, recently were described using the Caputo's fractional derivative. Using the concept of weak fractional derivative, in this paper we reduces the characterization of $\mathcal{B}^{\alpha}_{pq}$ to the case $\mathcal{B}^{\gamma}_{pq}$, where γ is any positive number strictly less than α.

Key words and phrases. Nikolskiĭ-Besov spaces, Fractional derivative, Poisson kernel, Poisson integral.

[a]Proyecto ID 3354.

1. Introducción

La clase de Nikolskiĭ-Besov $\mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$ (introducida por Oleg Vladimírovich Besov) juega un importante papel en el análisis matemático y sus aplicaciones; es bien conocida su importancia en la solución definitiva del problema sobre las trazas de las funciones del espacio de Sóbolev, estudiado en los trabajos de N. Aranzaijn, Gagliardo y Besov entre otros (ver por ejemplo [1]) lo que dio un significativo impulso a la teoría de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para los operadores en derivadas parciales. La escala de los espacios de Besov surge de modo natural también en las teorías de aproximación, de las series de Fourier y de interpolación de operadores lineales.

$\mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$ se define en términos del módulo de continuidad. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h := (h_1, \dots, h_n)$, $|h| := \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$, $t > 0$. El p-módulo de continuidad $\omega_p^k(f;t)$ de orden k para la función f se define mediante

$$\omega_p^k(f;t) := \sup_{|h|<t} \left\| \Delta_h^k f(\bullet) \right\|_p,$$

donde $(\Delta_h f)(\bullet) := f(\bullet + h) - f(\bullet), \Delta_h^k f := \Delta_h\big(\Delta_h^{k-1} f\big)$, $k = 2, 3, \dots$ es la diferencia finita de orden k y $\|\bullet\|_p$ la norma en $L_p\big(\mathbb{R}^n\big)$.

Definición 1.1. Sean $1 \le p, q \le \infty$, $\alpha > 0$. Se dice que $f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$ si $f \in L_p\big(\mathbb{R}^n\big)$ y $\|f\|_{B_{pq}^{\alpha}} < \infty$, donde

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{pq}^{\alpha}} &:= \|f\|_p + \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{\omega_p^k(f;t)}{t^{\alpha}} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}, \\ \|f\|_{B_{p\infty}^{\alpha}} &:= \|f\|_p + \sup_{t>0} \left(\frac{\omega_p^k(f;t)}{t^{\alpha}} \right), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > \alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Con la norma (1) estos espacios son de Banach y han sido descritos con ayuda de las derivadas parciales de la integral de Poisson

$$u(x,y) := (P_y * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(x-t) f(t)\, dt, \tag{2}$$

de la función f. Aquí

$$P_y(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-2\pi\left(i \sum_{k=1}^{n} x_k t_k + y|t| \right) \right] dt, \qquad y > 0,$$

es el núcleo de Poisson que puede escribirse en forma explícita

$$P_y(x) = c_n y\big(|x|^2 + y^2\big)^{-(n+1)/2}, \qquad y > 0,$$

con $c_n = \pi^{-(n+1)/2}\,\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)$; $\Gamma(\tau) = \displaystyle\int_0^\infty s^{\tau-1}e^{-s}\,ds$, $\tau > 0$.

En Stein [4] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *Sean* $1 \le p,q \le \infty$*;* $0 < \alpha < 1$*,* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$*. Entonces* $f \in \mathbb{B}^\alpha_{pq}(\mathbb{R}^n)$ *si y sólo si*

$$\left\| \, y^{1-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \frac{\partial}{\partial y} u(\bullet, y) \right\|_p \, \right\|_q < \infty. \tag{3}$$

La q*-norma se toma respecto a* $y \in \mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$*, en tanto que la* p*-norma interna se refiere a* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

La derivada fraccionaria según Caputo se define $\forall\, \beta > 0$ mediante la fórmula

$$\big(\mathcal{D}^\beta f\big)(x) \coloneqq \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta)} \int_x^\infty (t-x)^{-\{\beta\}} f^{(m)}(t)\,dt, \qquad m = [\beta] + 1,$$

donde $[\beta]$ representa la parte entera de $\beta \in \mathbb{R}$, y $\{\beta\} \coloneqq \beta - [\beta]$ es la parte fraccionaria. Para $\beta \in \mathbb{N}_0$ se define

$$\big(\mathcal{D}^\beta f\big)(x) \coloneqq (-1)^\beta \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x), \qquad \mathcal{D}^0 f \equiv f.$$

Usando esta derivada los autores muestran una generalización del Teorema anterior (ver [3]).

Teorema 1.3. *Sean* $1 \le p,q \le \infty$*,* $0 < \alpha < \beta \le 1$*,* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$*. Entonces*

$$f \in \mathbb{B}^\alpha_{p,q} \qquad \text{si y sólo si} \qquad \left\| \, y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \mathcal{D}^\beta_y u(\bullet, y) \right\|_p \, \right\|_q < \infty.$$

Aquí usaremos indistintamente los términos “derivada fraccionaria” y “derivada de orden no entero”.

El teorema 1.2 permite una caracterización equivalente de los espacios de Nikolskiĭ-Besov, a saber, se definen los espacios $\mathbb{B}^\alpha_{pq}(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha > 0$ mediante la fórmula

$$\mathbb{B}^\alpha_{pq}(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^n) : \left\| \, y^{k-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(\bullet, y) \right\|_p \, \right\|_q < \infty \right\},$$

donde k es el menor entero mayor que α. Además es válido el siguiente lema (ver Stein [4, 3]).

Lema 1.4. *Sean $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, y k, l enteros mayores que α. Entonces las condiciones*

$$\left\| \, y^{k-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(\bullet, y) \right\|_p \, \right\|_q < \infty, \qquad \text{y}, \qquad \left\| \, y^{l-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \frac{\partial^l}{\partial y^l} u(\bullet, y) \right\|_p \, \right\|_q < \infty$$

son equivalentes.

En consecuencia si $\alpha > 0$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ y k es cualquier entero mayor que α, se tiene que $f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\left\| \, y^{k-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(\bullet, y) \right\|_p \, \right\|_q < \infty.$$

En [3] los autores también muestran una caracterización similar para el caso no entero. Precisamente

Teorema 1.5. *Sean $\alpha > 0$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ y β cualquier real mayor que α. Entonces $f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si*

$$\left\| \, y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \mathcal{D}_y^{\beta} u(\bullet, y) \right\|_p \, \right\|_q < \infty.$$

En el caso entero se tiene la siguiente descripción de $\mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$ para $\alpha > 1$.

Teorema 1.6. *Sean $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha > 1$. Entonces $f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$ si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha-1}$, $\quad j = 1, \ldots, n$.*

En el presente trabajo que es la continuación lógica del artículo [3], se propone una descripción de la clase $\mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$ usando para ello la derivada débil fraccionaria (según Caputo) de la integral de Poisson para funciones de dicha clase. Precisamente, se prueba el siguiente resultado (ver teorema 3.2). *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$ y $0 < \beta < \alpha$. Si $f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$, entonces $\mathcal{D}_j^{\beta} f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha-\beta}$,* $j = 1, \ldots, n$. Este teorema contiene como caso particular solamente la condición necesaria del teorema 1.6.

2. Preliminares

En esta sección presentamos la definición de derivada parcial fraccionaria según Caputo, así como algunas propiedades de los operadores de Hardy, del núcleo y de la integral de Poisson. La notación es la utilizada en [3], donde pueden encontrarse más detalles.

2.1. Desigualdad de Hardy

Dada la función medible $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definimos los operadores de Hardy:

$$(H_1 f)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy,$$
$$(H_2 f)(x) := \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy.$$

Teorema 2.1. *Supongamos que $1 \le p \le +\infty$ y p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, (para $p = 1$, $p' := \infty$ y viceversa).*

(1) Si $\alpha < \frac{1}{p'}$, entonces

$$\left\|x^\alpha H_1 f(x)\right\|_p \le \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \left\|x^\alpha f(x)\right\|_p. \tag{4}$$

En particular para $\alpha = 0$, $\left\|H_1 f\right\|_p \le p'\|f\|_p$.

(2) Si $\alpha > \frac{1}{p'}$, entonces

$$\left\|x^\alpha H_2 f(x)\right\|_p \le \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \left\|x^\alpha f(x)\right\|_p. \tag{5}$$

2.2. Núcleo e Integral de Poisson

El núcleo y la integral de Poisson poseen una serie de propiedades conocidas cuyas demostraciones se encuentran por ejemplo en Stein [4]. Entre estas propiedades se destacan:

(1) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} P_y(x)\,dx = 1$.

(2) $P_y(x)$ es función armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \big\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0\big\}$.

(3) Propiedad de semigrupo:

$$\forall y_1 > 0,\ \forall y_2 > 0,\ P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) = P_{y_1+y_2}(x).$$

(4) $\dfrac{\partial^k P_y(x)}{\partial x_j^k}$, $\dfrac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k} \in L_p\big(\mathbb{R}^n\big)$, para $y > 0$, $1 \le p \le \infty$, $j = 1, \ldots, n$ y $k \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(5) Para $y > 0$, $1 \le q \le \infty$, $j = 1, \ldots, n$ y $k \in \mathbb{N}_0$ se satisfacen las siguientes desigualdades :

a) $\left|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k}\right| \ll y^{-n-k}, \qquad \left|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k}\right| \ll |x|^{-n-k},$

b) $\left|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial x_j^k}\right| \ll y^{-n-k}, \qquad \left|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial x_j^k}\right| \ll |x|^{-n-k},$

c) $\left\|\frac{\partial^k P_y(\bullet)}{\partial y^k}\right\|_q \ll y^{-\frac{n}{q'}-k}, \qquad \left\|\frac{\partial^k P_y(\bullet)}{\partial x_j^k}\right\|_q \ll y^{-\frac{n}{q'}-k}.$

$\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1. \text{ Si } q=1,\ q'=\infty \text{ y viceversa}\right).$

La natación $A \ll B$ significa que tiene lugar la desigualdad $A \leq cB$, donde c es una constante positiva que no depende ni de A ni de B y cuyo valor exacto no interesa.

Si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces para $u(x,y)$ (ver [4]) se tiene:

(1) $\lim\limits_{y\to+0} u(x,y) = f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además $u(x,y) \to f(x)$, $y \to +0$ en $L_p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.

(2) $\dfrac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k} = \dfrac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k} * f(x).$

(3) $\dfrac{\partial^{k+m} u(x,y)}{\partial y^{k+m}} = \dfrac{\partial^k u(x,\frac{y}{2})}{\partial y^k} * \dfrac{\partial^m P_{\frac{y}{2}}(x)}{\partial y^m}, \qquad k,m \in \mathbb{N}_0.$

2.3. Derivada parcial fraccionaria según Caputo

Definición 2.2. Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}^n$, β un real positivo no entero y $m=[\beta]+1$. Se define la derivada parcial fraccionaria (según Caputo) de orden β, con respecto a la variable x_k, de la función f mediante la fórmula

$$\left(\mathcal{D}^\beta_{x_k} f\right)(x) := \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta)} \int_{x_k}^{\infty} (t-x_k)^{-\{\beta\}} \frac{\partial^m}{\partial x_k^m} f\left(x + (t-x_k)\overrightarrow{e_k}\right) dt,$$

siempre que dicha expresión tenga sentido. Aquí $\overrightarrow{e_k} := (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$.

Para $\beta \in \mathbb{N}_0$ se define la derivada parcial fraccionaria mediante la fórmula

$$\left(\mathcal{D}^\beta_{x_k} f\right)(x) := (-1)^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial x_k^\beta} f(x).$$

Se tiene el siguiente resultado.

Si $\beta \geq 0$, $y > 0$, entonces

$$\begin{aligned} &\left|\mathcal{D}^\beta_y P_y(\bullet)\right| \ll y^{-n-\beta}, \qquad \left|\mathcal{D}^\beta_y P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-\beta}. \\ &\left|\mathcal{D}^\beta_{x_j} P_y(\bullet)\right| \ll y^{-n-\beta}, \qquad \left|\mathcal{D}^\beta_{x_j} P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-\beta}; \qquad j=1,\dots,n. \end{aligned} \tag{6}$$

Los estimativos (6) permiten establecer acotaciones adecuadas para las L_q–normas de las derivadas fraccionarias del núcleo de Poisson, como se indica a continuación:

(1) Sean $1 \le q \le \infty$, $\beta \ge 0$, $y > 0$. Entonces

$$\left\| \mathcal{D}_y^{\beta} P_y(\bullet) \right\|_q \ll y^{-\frac{n}{q'}-\beta}, \qquad \left\| \mathcal{D}_{x_j}^{\beta} P_y(x) \right\|_q \ll y^{-\frac{n}{q'}-\beta}; \quad j = 1, \dots, n.$$

(2) Sean $1 \le q \le \infty$, $\overrightarrow{\beta} \ge \overrightarrow{0}$, $\beta \ge 0$, $y > 0$. Entonces

$$\left\| \mathcal{D}_y^{\beta} P_y(x) \right\|_q \ll y^{-\frac{n}{q'}-\beta}, \qquad \left\| \mathcal{D}_x^{\overrightarrow{\beta}} P_y(x) \right\|_q \ll y^{-\frac{n}{q'}-\left|\overrightarrow{\beta}\right|},$$

donde $\overrightarrow{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| := \beta_1 + \cdots + \beta_n$,
$\overrightarrow{\beta} \ge \overrightarrow{0}$, es decir, $\forall\, j = 1, \dots, n$, $\beta_j \ge 0$ y $\mathcal{D}_x^{\overrightarrow{\beta}} := \mathcal{D}_{x_1}^{\beta_1} \mathcal{D}_{x_2}^{\beta_2} \cdots \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n}$.

Usaremos la notación

$$\mathcal{D}_{x_1,\dots,x_n}^{\beta_1,\dots,\beta_n} := \mathcal{D}_{x_1}^{\beta_1} \mathcal{D}_{x_2}^{\beta_2} \cdots \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} \equiv \mathcal{D}_1^{\beta_1} \mathcal{D}_2^{\beta_2} \cdots \mathcal{D}_n^{\beta_n}.$$

En particular $\mathcal{D}_{y,j}^{\gamma,\beta} \equiv \mathcal{D}_y^{\gamma} \mathcal{D}_{x_j}^{\beta}$.

3. Disminución del parámetro de suavidad en $\mathbb{B}_{pq}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ usando derivadas fraccionarias débiles

Señalemos que si $f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$, la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$ no necesariamente existe en el sentido usual. Por ello se prueba la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en un sentido débil (ver [4, pág. 147]). Precisamente si $f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$, entonces para $j = 1, \dots, n$, la familia $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y) \right\}$, que depende del parámetro $y > 0$, es de Cauchy en $L_p(\mathbb{R}^n)$ cuando $y \to +0$. El límite de tal familia lo denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ y lo denominaremos derivada débil de f con respecto a x_j. Es fácil demostrar que si $f \in \mathbb{B}_{pq}^{\alpha}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe en el sentido usual, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe en el sentido débil y estas derivadas coinciden. Por esta razón la notación "$\frac{\partial f}{\partial x_j}$" será clara de acuerdo al contexto.

Destaquemos que para las derivadas débiles de orden superior existen dos variantes para su definición.

- La primera es recursiva: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right)_{(1)} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, es decir, la segunda derivada débil se considera como la derivada débil de la derivada débil $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

- La segunda variante es: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right)_{(2)} := \lim\limits_{y\to+0} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y)$ donde $u = P_y * f$, o sea, la segunda derivada débil es el límite en $L_p(\mathbb{R}^n)$ de la respectiva familia de Cauchy $\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y) : y > 0\right\}$.

Sin embargo, como se muestra a continuación estas dos derivadas coinciden. Notemos como U la integral de Poisson de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, o sea: $U(x,y) := P_y(x) * \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)_{(1)} f(x) &:= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial x_j} U(x,y)\\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[P_y(x) * \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right]\\ &\overset{(*)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\big(P_y(x) * f(x)\big)\\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)_{(2)} f(x).\end{aligned} \tag{7}$$

La igualdad $(*)$ en (7) se establece de manera independiente en [2] incluso para las derivadas de orden no entero.

Una situación completamente análoga se tiene para las derivadas fraccionarias. Este caso (por contener el caso entero) es el que detallaremos a continuación.

Lema 3.1. *Sean $1 \le p, q \le \infty$, $\alpha > 0$ y $0 < \beta < 1$. Si $f \in \mathbb{B}^{\alpha}_{pq}$ entonces para $j = 1, \dots, n$, la familia $\left\{\mathcal{D}^{\beta}_j u(x,y) : y > 0\right\}$ es de Cauchy en $L_p(\mathbb{R}^n)$ cuando $y \to +0$.*

Demostración. Recordemos que $f \in \mathbb{B}^{\alpha}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\left(f \in L_p(\mathbb{R}^n) \wedge \left\| \, y^{\delta} \left\| \mathcal{D}^{\gamma}_y u(x,y) \right\|_p \, \right\|_q < \infty : \forall\, \gamma > \alpha\right) \quad \text{aquí,} \quad \delta = \gamma - \alpha - \frac{1}{q}.$$

Usando la desigualdad de Hardy y las propiedades del núcleo y la integral de Poisson, es posible establecer la desigualdad auxiliar (ver por ejemplo [4, Cap. V, §5; Lema 4']).

Sea $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p, q \le \infty$. Entonces $\forall\, \overrightarrow{\beta} > \overrightarrow{0}$, $\forall\, \gamma > 0$ y $\forall\, \delta \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \, y^{\delta + |\overrightarrow{\beta}|} \left\| \mathcal{D}^{\gamma, \overrightarrow{\beta}}_{y,x} u(x,y) \right\|_p \, \right\|_q \ll \left\| \, y^{\delta} \left\| \mathcal{D}^{\gamma}_y u(x,y) \right\|_p \, \right\|_q . \tag{8}$$

Aquí $\overrightarrow{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$.

Ahora probemos que si $\gamma > \alpha$ entonces

$$\left\|D^{\gamma,\,\beta}_{y,\,j} u(\bullet, y)\right\|_p \ll y^{\alpha-\beta-\gamma}, \quad 1 \le p, q \le \infty. \tag{9}$$

Caso I. Sea $1 \le q < \infty$. Si $f \in \mathbb{B}^{\alpha}_{pq}$ entonces $\left\| \, y^{\delta} \left\|\mathcal{D}^{\gamma}_{y} u(\bullet, y)\right\|_p \, \right\|_q = J_\gamma < \infty$, $\forall\, \gamma > \alpha$ y $\delta = \gamma - \alpha - 1/q$. Usando la desigualdad (8) tenemos

$$\left\| \, y^{\delta+\beta} \left\|\mathcal{D}^{\gamma,\,\beta}_{y,\,j} u(x, y)\right\|_p \, \right\|_q \ll \left\| \, y^{\delta} \left\|\mathcal{D}^{\gamma}_{y} u(x, y)\right\|_p \, \right\|_q, \quad \forall\, \beta, \gamma > 0, \, \forall\, \delta \in \mathbb{R}.$$

Así $\forall\, \gamma > \alpha > \beta > 0$ y $\delta = \gamma - \alpha - 1/q$,

$$\left\| \, y^{\delta+\beta} \left\|\mathcal{D}^{\gamma,\,\beta}_{y,\,j} u(x, y)\right\|_p \, \right\|_q \ll J_\gamma < \infty. \tag{10}$$

Sea $0 < y \le 1$. Entonces $\forall\, \gamma > \alpha$

$$\int_y^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{D}^{\gamma,\,\beta}_{\tau,\,j} u(\bullet, \tau)\, d\tau = \mathcal{D}^{\gamma,\,\beta}_{\tau,\,j} u(\bullet, \tau)\Big|_{\tau=1} - \mathcal{D}^{\gamma,\,\beta}_{y,\,j} u(\bullet, y).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{D}^{\gamma,\,\beta}_{y,\,j} u(\bullet, y)\right\|_p &= \left\| -\int_y^1 \mathcal{D}^{\gamma+1,\,\beta}_{\tau,\,j} u(\bullet, \tau)\, d\tau + \mathcal{D}^{\gamma,\,\beta}_{y,\,j} u(\bullet, y)\Big|_{y=1} \right\|_p \\ &\le \int_y^1 \left\|\mathcal{D}^{\gamma+1,\,\beta}_{\tau,\,j} u(\bullet, \tau)\right\|_p d\tau + A, \end{aligned} \tag{11}$$

donde $A \equiv \left\|\mathcal{D}^{\gamma,\,\beta}_{y,\,j} u(\bullet, y)\Big|_{y=1}\right\|_p$. Ahora, usando la desigualdad de Hölder, tenemos que $\forall\, \delta' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_y^1 \left\|\mathcal{D}^{\gamma+1,\,\beta}_{\tau,\,j} u(\bullet, \tau)\right\|_p d\tau &= \int_y^1 \tau^{-(\delta'+\beta)} \left(\tau^{\delta'+\beta} \left\|\mathcal{D}^{\gamma+1,\,\beta}_{\tau,\,j} u(\bullet, \tau)\right\|_p \right) d\tau \\ &\le \left\|\tau^{-(\delta'+\beta)}\right\|_{L_{q'}([y,1])} \left\| \, \tau^{\delta'+\beta} \left\|\mathcal{D}^{\gamma+1,\,\beta}_{\tau,\,j} u(\bullet, \tau)\right\|_p \, \right\|_{L_{q}([y,1])} \\ &\le \left\|\tau^{-(\delta'+\beta)}\right\|_{L_{q'}([y,1])} \left\| \, y^{\delta'+\beta} \left\|\mathcal{D}^{\gamma+1,\,\beta}_{y,\,j} u(\bullet, y)\right\|_p \, \right\|_q . \end{aligned}$$

Así $\forall\, \delta' \in \mathbb{R}$,

$$\int_y^1 \left\| \mathcal{D}_{\tau,\, j}^{\gamma+1,\, \beta} u(\bullet, \tau) \right\|_p d\tau$$
$$\ll \left\| \tau^{-(\delta'+\beta)} \right\|_{L_{q'([y,1])}} \left\| \; y^{\delta'+\beta} \left\| \mathcal{D}_{y,\, j}^{\gamma+1,\, \beta} u(\bullet, y) \right\|_p \; \right\|_q .$$

En particular para $\delta' = \delta + 1$, usando (10) tenemos

$$\int_y^1 \left\| \mathcal{D}_{\tau,\, j}^{\gamma+1,\, \beta} u(\bullet, \tau) \right\|_p d\tau \ll J_{\gamma+1} \left\| \tau^{-(\delta'+\beta)} \right\|_{L_{q'([y,1])}}, \quad \delta' = \delta + 1.$$

Reemplazando en (11) tenemos $\forall\, \gamma > \alpha > \beta > 0 \quad \text{y} \quad \delta' = \delta + 1$,

$$\left\| \mathcal{D}_{y,\, j}^{\gamma,\, \beta} u(\bullet, y) \right\|_p \ll J_{\gamma+1} \left\| \tau^{-(\delta'+\beta)} \right\|_{L_{q'([y,1])}} + A. \tag{12}$$

Si $q' < \infty$, $(q \neq 1)$, entonces

$$\left\| \tau^{-(\delta'+\beta)} \right\|_{L_{q'([y,1])}} = \left(\int_y^1 \tau^{-(\delta'+\beta)q'}\, d\tau \right)^{1/q'} =$$
$$\left[\frac{1}{1-(\delta'+\beta)q'} \left(1 - y^{1-(\delta'+\beta)q'} \right) \right]^{1/q'} .$$

Como

$$\begin{aligned} 1 - (\delta + 1 + \beta)q' &= 1 - \left(\gamma - \alpha - \frac{1}{q} + 1 + \beta \right) q' \\ &= q' \left(\frac{1}{q'} - \gamma + \alpha + \frac{1}{q} - 1 - \beta \right) \\ &= q'(\alpha - \beta - \gamma) < 0 \qquad (\text{ya que } \gamma > \alpha - \beta), \end{aligned}$$

de (12) se sigue que:

$$\begin{aligned} \left\| D_{y,\, j}^{\gamma,\, \beta} u(\bullet, y) \right\|_p &\ll J_{\gamma+1} \left(y^{1-(\delta'+\beta)q'} - 1 \right)^{1/q'} + A \\ &\leq J_{\gamma+1} \left(y^{1-(\delta'+\beta)q'} \right)^{1/q'} + A \\ &\leq M \left(y^{\frac{1}{q'} - \delta' - \beta} + 1 \right), \quad \text{donde} \quad M = \text{máx}\{J_{\gamma+1}, A\}. \end{aligned}$$

Si $q' = \infty$, $(q = 1)$, entonces $\left\| \tau^{-(\delta'+\beta)} \right\|_{L_{\infty([y,1])}} = \underset{y \leq \tau \leq 1}{\text{máx}}\, \tau^{-(\delta'+\beta)} = y^{-(\delta'+\beta)}$, de (12), $\left\| D_{y,\, j}^{\gamma,\, \beta} u(\bullet,\, y) \right\|_p \ll M \left(y^{-(\delta'+\beta)} + 1 \right)$. Hemos así demostrado que

$$\left\| D_{y,\, j}^{\gamma,\, \beta} u(\bullet, y) \right\|_p \ll 1 + y^{\frac{1}{q'} - (\delta'+\beta)}; \quad 1 \leq q < \infty, \quad 1 < q' \leq \infty$$

$\Big($para $\quad q' = \infty, \frac{1}{q'} := 0\Big)$.

Como $\frac{1}{q'} - (\delta' + \beta) = \alpha - \beta - \gamma < 0 \quad$ y $\quad 0 < y \le 1$ entonces

$$\Big\| D_{y,\,j}^{\gamma,\,\beta} u(\bullet, y) \Big\|_p \ll 1 + y^{\alpha-\beta-\gamma} \ll y^{\alpha-\beta-\gamma}, \qquad \forall\, \gamma > \alpha > \beta > 0.$$

Caso II. Supongamos que $q = \infty$. Si $f \in \mathbb{B}_{p\infty}^{\alpha}$ entonces

$$\Big\| \; y^{\delta} \big\| \mathcal{D}_y^{\gamma} u(\bullet, y) \big\|_p \; \Big\|_{\infty} = J_{\gamma} < \infty, \qquad \forall\, \gamma > \alpha,\, \delta = \gamma - \alpha.$$

Así $\Big\| \mathcal{D}_y^{\gamma} u(\bullet, y) \Big\|_p \ll y^{-\delta}$. Luego,

$$\Big\| \mathcal{D}_{y,\,j}^{\gamma,\,\beta} u(\bullet, y) \Big\|_p \ll y^{-\beta} \big\| \mathcal{D}_y^{\gamma} u(\bullet, y) \big\|_p \ll y^{-\delta-\beta} = y^{\alpha-\gamma-\beta}.$$

Denotemos $\mathcal{D}_j^{\beta} u(x, y) = \varphi(x, y)$ y demostremos ahora por inducción sobre N que

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{A_k(x)}{k!} (1-y)^k + \frac{(-1)^N}{(N-1)!} \int_y^1 (\tau - y)^{N-1} D_{\tau}^N \varphi(x, \tau)\, d\tau, \quad (13)$$

donde $A_k(x) = D_y^k \varphi(x, 1)$, $k = 1, 2, \ldots$; $A_0(x) = \varphi(x, 1)$.

En efecto, como

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, 1) - \int_y^1 D_{\tau} \varphi(x, \tau)\, d\tau,$$

tenemos el caso $N = 1$. Ahora

$$D_y \varphi(x, y) = D_y \varphi(x, 1) - \int_y^1 D_{\tau}^2 \varphi(x, \tau)\, d\tau,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \varphi(x, 1) - \int_y^1 \left(D_{\tau} \varphi(x, 1) - \int_{\tau}^1 D_{\upsilon}^2 \varphi(x, \upsilon)\, d\upsilon \right) d\tau \\
&= \varphi(x, 1) - D_y \varphi(x, 1)(1 - y) + \int_y^1 \int_{\tau}^1 D_{\upsilon}^2 \varphi(x, \upsilon)\, d\upsilon\, d\tau \\
&= \varphi(x, 1) - D_y \varphi(x, 1)(1 - y) + \int_y^1 \int_y^{\upsilon} D_{\upsilon}^2 \varphi(x, \upsilon)\, d\tau\, d\upsilon \\
&= \varphi(x, 1) - D_y \varphi(x, 1)(1 - y) + \int_y^1 (\upsilon - y) D_{\upsilon}^2 \varphi(x, \upsilon)\, d\upsilon;
\end{aligned}$$

así tenemos el caso $N=2$

$$\varphi(x,y)=A_0-A_1(1-y)+\int_y^1(\tau-y)D_\tau^2\varphi(x,\tau)\,d\tau,$$

donde $A_0=\varphi(x,1)$, $A_1=D_y\varphi(x,1)$. Ahora supongamos que (13) es válida. Como

$$D_\tau^N\varphi(x,\tau)=D_\tau^N\varphi(x,1)-\int_\tau^1 D_\upsilon^{N+1}\varphi(x,\upsilon)\,d\upsilon,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y)=&\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{A_k(x)}{k!}(1-y)^k+\\
&\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\int_y^1(\tau-y)^{N-1}\left(D_\tau^N\varphi(x,1)-\int_\tau^1 D_\upsilon^{N+1}\varphi(x,\upsilon)\,d\upsilon\right)d\tau=\\
&\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{A_k(x)}{k!}(1-y)^k+\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\int_y^1(\tau-y)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,1)\,d\tau-\\
&\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\int_y^1(\tau-y)^{N-1}\int_\tau^1 D_\upsilon^{N+1}\varphi(x,\upsilon)\,d\upsilon\,d\tau.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y)=&\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{A_k(x)}{k!}(1-y)^k+\frac{(-1)^N}{N!}(1-y)^N D_y^N(x,1)-\\
&\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\int_y^1 D_\upsilon^{N+1}\varphi(x,\upsilon)\int_y^\upsilon(\tau-y)^{N-1}\,d\tau\,d\upsilon\\
=&\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{A_k(x)}{k!}(1-y)^k+\frac{(-1)^{N+1}}{N!}\int_y^1(\upsilon-y)^N D_\upsilon^{N+1}\varphi(x,\upsilon)\,d\upsilon;
\end{aligned}$$

lo que establece la validez de (13).

Demostremos ahora que $\{\varphi(x,y):y>0\}$ es una familia de Cauchy en $L_p(\mathbb{R}^n)$ cuando $y\to+0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0<y_1<y_2<1$. Entonces por (13) tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)=&\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{A_k(x)}{k!}\Big[(1-y_1)^k-(1-y_2)^k\Big]+\\
&\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\left[\int_{y_1}^1(\tau-y_1)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau-\int_{y_2}^1(\tau-y_2)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau\right].
\end{aligned}$$

Luego

$$\Big\|\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)\Big\|_p \ll \sum_{k=0}^{N-1}\Big[(1-y_1)^k-(1-y_2)^k\Big]+$$
$$\Big\|\int_{y_1}^1(\tau-y_1)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau-\int_{y_2}^1(\tau-y_2)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau\Big\|_p.$$

Observemos que $\sum_{k=0}^{N-1}\Big[(1-y_1)^k-(1-y_2)^k\Big]\to 0$ cuando $y_1,y_2\to +0$; el segundo término de la última desigualdad se acota como sigue:

$$\Big\|\int_{y_1}^1(\tau-y_1)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau-\int_{y_2}^1(\tau-y_1)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau+$$
$$\int_{y_2}^1(\tau-y_1)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau-\int_{y_2}^1(\tau-y_2)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau\Big\|_p=$$
$$\Big\|\int_{y_1}^{y_2}(\tau-y_1)^{N-1}D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau+$$
$$\int_{y_2}^1\Big[(\tau-y_1)^{N-1}-(\tau-y_2)^{N-1}\Big]D_\tau^N\varphi(x,\tau)\,d\tau\Big\|_p\ll$$
$$\int_{y_1}^{y_2}(\tau-y_1)^{N-1}\Big\|D_\tau^N\varphi(x,\tau)\Big\|_p\,d\tau+$$
$$\int_{y_2}^1\Big[(\tau-y_1)^{N-1}-(\tau-y_2)^{N-1}\Big]\Big\|D_\tau^N\varphi(x,\tau)\Big\|_p\,d\tau.$$

Sean

$$I_1=\int_{y_1}^{y_2}(\tau-y_1)^{N-1}\Big\|D_\tau^N\varphi(x,\tau)\Big\|_p\,d\tau$$
$$\equiv\int_{y_1}^{y_2}(\tau-y_1)^{N-1}\Big\|\mathcal{D}_{\tau,\,j}^{N,\,\beta}u(x,\tau)\Big\|_p\,d\tau.$$

$$I_2=\int_{y_2}^1\Big[(\tau-y_1)^{N-1}-(\tau-y_2)^{N-1}\Big]\Big\|D_\tau^N\varphi(x,\tau)\Big\|_p\,d\tau$$
$$\equiv\int_{y_2}^1\Big[(\tau-y_1)^{N-1}-(\tau-y_2)^{N-1}\Big]\Big\|\mathcal{D}_{\tau,\,j}^{N,\,\beta}u(x,\tau)\Big\|_p\,d\tau.$$

Entonces por (9) tenemos que $\forall\, N : N > \beta > \alpha > 0$,

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \int_{y_1}^{y_2} (\tau - y_1)^{N-1} \tau^{\alpha-\beta-N}\, d\tau \\ &\ll \int_{y_1}^{y_2} \tau^{\alpha-\beta-1}\, d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(y_2^{\alpha-\beta} - y_1^{\alpha-\beta}\Big) \to +0, \qquad y_1, y_2 \to 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \int_{y_2}^{1} \Big[(\tau - y_1)^{N-1} - (\tau - y_2)^{N-1}\Big] \tau^{\alpha-\beta-N}\, d\tau \\ &= \int_{y_2}^{1} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k C_{N-1}^k \tau^{N-1-k} \big(y_1^k - y_2^k\big) \tau^{\alpha-\beta-N}\, d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k C_{N-1}^k \big(y_1^k - y_2^k\big) \int\limits_{y_2}^{1} \tau^{\alpha-\beta-1-k}\, d\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

Si $\alpha - \beta \neq k$, $k = 0, \dots, N-1$, entonces de (14) tenemos

$$I_2 \ll \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k}{\alpha-\beta-k} \big(y_1^k - y_2^k\big) \Big(1 - y_2^{\alpha-\beta-k}\Big),$$

y si $\alpha - \beta = m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} I_2 \ll \sum_{k=0,\, k\neq m}^{N-1} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k}{\alpha-\beta-k} \big(y_1^k - y_2^k\big) \Big(1 - y_2^{\alpha-\beta-k}\Big) \,+ \\ (-1)^m C_{N-1}^m \big(y_1^m - y_2^m\big) \ln\big(y_2^{-1}\big). \end{aligned}$$

Observemos que para $k = 0, 1, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} \lim_{y_1,\, y_2 \to +0} \big(y_1^k - y_2^k\big) \Big(1 - y_2^{\alpha-\beta-k}\Big) &= -\lim_{y_1, y_2 \to +0} y_1^k y_2^{\alpha-\beta-k} \\ &= -\lim_{y_1, y_2 \to +0} \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^k y_2^{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Como $0 < \dfrac{y_1}{y_2} < 1$ y $\displaystyle\lim_{y_1,\, y_2 \to +0} y_2^{\alpha-\beta} = 0$, entonces

$$\lim_{y_1,\, y_2 \to +0} \big(y_1^k - y_2^k\big) \Big(1 - y_2^{\alpha-\beta-k}\Big) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}\lim_{y_1,\,y_2\to+0}\left(y_1^m-y_2^m\right)\ln\left(y_2^{-1}\right) &= \lim_{y_1,\,y_2\to+0}\left(y_2^m-y_1^m\right)\ln(y_2)\\ &= \lim_{y_1,\,y_2\to+0}\left[1-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^m\right]y_2^m\ln(y_2)\,.\end{aligned}$$

Como $\left[1-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^m\right]<1$ y $\lim_{y_1,\,y_2\to+0} y_2^m\ln(y_2)=0$, entonces

$$\lim_{y_1,\,y_2\to+0}\left(y_1^m-y_2^m\right)\ln\left(y_2^{-1}\right)=0.$$

Así $I_2\to 0$, $y_1,y_2\to+0$. Por tanto $\left\|\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)\right\|_p\to 0$, $y_1,y_2\to +0$ de donde se tiene que $\left\{\varphi(x,y):y>0\right\}$ es una familia de Cauchy en $L_p(\mathbb{R}^n)$ cuando $y\to+0$. ☑

Por el lema anterior $\left\{\mathcal{D}_j^\beta u(x,y)\right\}$ converge en $L_p(\mathbb{R}^n)$ cuando $y\to+0$ si $f\in\mathbb{B}_{pq}^\alpha$. El límite de tal familia lo denotaremos por $\mathcal{D}_j^\beta f(x)$ y lo llamaremos derivada débil de f de orden β con respecto a x_j.

Teorema 3.2. *Sean $1\le p,q\le\infty$, $\alpha>0$ y $0<\beta<\alpha$. Si $f\in\mathbb{B}_{pq}^\alpha$, entonces $\mathcal{D}_j^\beta f\in\mathbb{B}_{pq}^{\alpha-\beta}$, $j=1,\dots,n$.*

Demostración. Usando la desigualdad de Hardy y las propiedades del núcleo y la integral de Poisson, es fácil establecer, procediendo como en (8), lo siguiente: $\forall\,\beta,\gamma>0$ y $\forall\,\delta:\delta-\beta+1>\frac{1}{q'}$,

$$\left\|\,y^\delta\left\|\mathcal{D}_{y,\,j}^{\gamma,\,\beta}u(x,y)\right\|_p\,\right\|_q \ll \left\|\,y^\delta\left\|\mathcal{D}_{y}^{\gamma+\beta}u(x,y)\right\|_p\,\right\|_q. \tag{15}$$

Para demostrar que $\mathcal{D}_j^\beta f\in\mathbb{B}_{pq}^{\alpha-\beta}$ debemos probar que para $\lambda>\alpha-\beta$ se tiene que

$$\left\|\,y^{\lambda-(\alpha-\beta)-1/q}\left\|\mathcal{D}_y^\lambda U(x,y)\right\|_p\,\right\|_q<\infty, \tag{16}$$

donde U es la integral de Poisson de $\mathcal{D}_j^\beta f$, o sea $U(x,y):=P_y(x)*\mathcal{D}_j^\beta f(x)$. Observemos que

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{D}_y^\lambda U(x,y)\right\|_p &= \left\|\mathcal{D}_y^\lambda\big(P_y(x)*\mathcal{D}_j^\beta f(x)\big)\right\|_p\\ &= \left\|P_y(x)*\mathcal{D}_{y,\,j}^{\lambda,\,\beta}f(x)\right\|_p \ll \left\|\mathcal{D}_{y,\,j}^{\lambda,\,\beta}u(x,y)\right\|_p.\end{aligned}$$

Usamos aquí la igualdad $\mathcal{D}_y^\lambda(P_y * g) = P_y * \mathcal{D}_y^\lambda g,$ donde $\mathcal{D}_y^\lambda g \in L_p$ es la derivada débil de g, dicha igualdad se deduce de

$$\left\|P_y * \mathcal{D}_y^\lambda g - \mathcal{D}_y^\lambda (P_y * u)\right\|_p \leq \left\|P_y\right\|_1 \left\|\mathcal{D}_y^\lambda g - \mathcal{D}_y^\lambda u\right\|_p \to 0, \qquad \text{con } u = P_y * g.$$

Razonamientos similares se encuentran por ejemplo en [2, pág. 69].

Entonces, tomando $\gamma = \lambda + \beta$, $\delta = \gamma - \alpha - 1/q$ y reemplazando en (15) obtenemos, con ayuda de la desigualdad de Young, que

$$\begin{aligned} \left\| \, y^{\lambda-(\alpha-\beta)-1/q} \left\|\mathcal{D}_y^\lambda U(x,y)\right\|_p \, \right\|_q &\ll \left\| \, y^{\gamma-\alpha-1/q} \left\|\mathcal{D}_{y,\,j}^{\lambda,\,\beta} u(x,y)\right\|_p \, \right\|_q \\ &\ll \left\| \, y^{\gamma-\alpha-1/q} \left\|\mathcal{D}_y^{\lambda+\beta} u(x,y)\right\|_p \, \right\|_q \\ &= \left\| \, y^{\gamma-\alpha-1/q} \left\|\mathcal{D}_y^{\gamma} u(x,y)\right\|_p \, \right\|_q . \end{aligned}$$

Como $f \in \mathbb{B}_{pq}^\alpha$, $\left\| \, y^{\gamma-\alpha-1/q} \left\|\mathcal{D}_y^{\gamma} u(x,y)\right\|_p \, \right\|_q < \infty, \forall\, \gamma > \alpha$, obteniendo (16). ☑

Referencias

[1] O. V. Besov and V. P. Ilin y S. M. Nikolsky, *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems*, V. H. Winston, 1979.

[2] F. Enriquez, Montes A., and Pérez J., *Caracterización de los espacios de lipschitz a través de las derivadas fraccionarias según liouville*, Matematicas: Enseñanza Universitaria **XVII** (2009), no. 2, 57–72 (es).

[3] F. Enríquez, Montes A., and Pérez J., *A Characterization of Structural Nikolskiĭ-Besov Spaces using Fractional Derivatives*, Boletín de Matemáticas **17** (2010), no. 1, 77–98.

[4] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princenton University Press, New Jersey, USA, 1970.

(Recibido en diciembre de 2012. Aceptado en septiembre de 2013)

Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias
Calle 2A, No. 3N-111
Cauca, Colombia
e-mail: enriquezfran@unicauca.edu.co
e-mail: jjperez@unicauca.edu.co

Esta página aparece intencionalmente en blanco