NOCIONES DE ARITMÉTICA

LOS NÚMEROS NATURALES
Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

Autor

Ing. Julio Alberto Ríos Gallego

JULIOPROFE

www.julioprofe.net

DEPARTAMENTO DE ANTIOQUIA

2013

Tabla de Contenido

Página

Prefacio

Uno de los objetivos de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (SCM) es el mejoramiento de la enseñanza y la difusión de las Matemáticas en nuestro medio. Teniendo presente este objetivo, la Gobernación de Antioquia invitó a la SCM a diseñar un plan de trabajo para mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el departamento de Antioquia. Las razones de esta invitación se ven reflejadas en los resultados en el área de Matemáticas de las pruebas SABER (mayo de 2012) y de los exámenes de admisión de la Universidad de Antioquia (mayo de 2012), y en los resultados de la Prueba de Matemáticas de Antioquia (Olimpiadas del Conocimiento, julio de 2012): la nota promedio en Matemáticas, después de estos tres exámenes, fue de 1.9 sobre 5.

Con el fin de enfrentar el problema del bajo nivel matemático de los estudiantes de los últimos grados de la educación secundaria en el departamento de Antioquia, la SCM diseñó el "Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en las instituciones educativas de Antioquia". Este texto, que llega hoy a sus manos, es uno de los muchos productos que el Plan quiere entregarle a Antioquia y hace parte de una colección de cinco textos dedicados a Nociones de Precálculo, Álgebra, Trigonometría- Geometría Analítica, Geometría Euclidiana y Aritmética. Los textos de la colección fueron escritos para unos cursillos de formación de maestros y de estudiantes normalistas, y con ellos se pretende ayudarles a los maestros en la preparación de sus clases.

Las Matemáticas son como un edificio. Para que el edificio se sostenga firmemente es necesario que tenga buenas bases. Los conceptos elementales que se recogen en los textos de esta colección son sólo una parte de las bases que debe haber construido, con ayuda de sus maestros, un alumno de secundaria que aspire a entrar a la Universidad. Se observará que en ellos se ha tratado de describir en detalle los pasos a seguir en cada tema, ejercicio o problema propuesto. Pensamos, basados en nuestra propia experiencia, que ésta es una buena manera de dictar una clase de Matemáticas. Volviendo a la analogía inicial, así como un muro del edificio se construye poco a poco colocando cada uno de los ladrillos que lo componen, la solución de un ejercicio o problema matemático es una sucesión ordenada de pasos lógicos y coherentes. Si en la construcción del muro faltan ladrillos o hay ladrillos mal colocados es muy posible que el muro se derrumbe. Si en la solución de un problema matemático los pasos están mal concatenados o faltan pasos, probablemente la solución sea incorrecta.

Así como un deportista debe dedicar muchas horas diarias a su entrenamiento, para poder soñar con triunfar, si queremos mejorar nuestra comprensión de las Matemáticas es necesario hacer muchos ejercicios, que aunque a veces parezcan repetidos siempre nos estarán ayudando a enfrentar con mayor lucidez la construcción del edificio de las Matemáticas.

Finalmente es importante señalar que estos textos no pretenden ser un tratado de Pedagogía. Más bien constituyen un conjunto articulado de conocimientos matemáticos que un docente de secundaria puede enseñar de manera efectiva con el uso de los saberes pedagógicos adquiridos en su formación académica. Responden entonces estos textos a nuestra convicción de que si se quiere enseñar bien algo no son suficientes ni las estrategias pedagógicas utilizadas ni el uso de las nuevas tecnologías informáticas, es indispensable tener previamente un conocimiento sólido de la materia que queremos enseñar.

Carlos Montenegro
Presidente, Sociedad Colombiana de Matemáticas

Prólogo

Mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre es un reto. Los conceptos matemáticos básicos tienen cierto grado de complejidad y en consecuencia es crucial que los textos matemáticos que se escriban para apoyar el proceso de su enseñanza y aprendizaje usen un lenguaje claro que concentre su atención en los aspectos realmente importantes de estos conceptos y facilite su comprensión.

El presente texto, que será distribuido en forma gratuita por la Gobernación de Antioquia, ha sido escrito para un curso de formación de docentes en Aritmética dentro del programa "Antioquia la más Educada", liderado por el Gobernador Sergio Fajardo Valderrama. La intención de este trabajo es hacer una exposición lo más clara posible de las nociones matemáticas básicas de los números naturales, que deberían ser conocidas por un bachiller antes de su ingreso a la universidad. Para ello hemos reducido la terminología matemática a la estrictamente necesaria y hemos prescindido de temas accesorios, que consideramos no son esenciales para la formación matemática de los estudiantes y que por el contrario pueden despertar en ellos un rechazo al estudio de las Matemáticas. Los ejemplos que se resuelven han sido elaborados de manera detallada y cuidadosa, siendo algunos de ellos inspirados en los libros que se referencian en la bibliografía. De esta manera esperamos que este material contribuya a mejorar la percepción, entre los estudiantes, de la importancia de las Matemáticas y de su inmenso poder en la solución de problemas concretos, tanto de las ciencias naturales como de la vida cotidiana.

Comité Editorial

Introducción

En más de dos décadas de trabajo docente en el área de Matemáticas, tanto a nivel de clases particulares como en instituciones educativas, he observado como los estudiantes con conocimientos aritméticos bien cimentados aprenden con facilidad los temas de álgebra, donde se manipulan constantemente números reales combinados con letras y símbolos matemáticos, así como la aplicación de conceptos propios de la aritmética y de la geometría.

A su vez, los estudiantes con una sólida estructura en aritmética, geometría y álgebra, son los que tienen éxito en asignaturas posteriores como trigonometría, cálculo, física y aquellas que corresponden a las carreras universitarias.

Motivado por lo anterior, escribí este curso de Aritmética dedicado al estudio de los números naturales, sus cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), la combinación de ellas en expresiones matemáticas y problemas de aplicación, y los conceptos de múltiplos, divisores, mínimo común múltiplo y máximo común divisor. El contenido del presente documento es de mi autoría, producto de mi experiencia como docente, y comprende 20 clases teóricas escritas en un lenguaje sencillo, 80 ejemplos explicados paso a paso y 10 talleres para que los estudiantes practiquen y pongan a prueba los conocimientos adquiridos en las diferentes sesiones. En el desarrollo de ejemplos y talleres, recomiendo que los niños resuelvan las operaciones manualmente y utilicen la calculadora u otro dispositivo únicamente para comprobar sus resultados.

Este material constituye una guía sugerida para maestros de primaria, de modo que puedan proporcionar a sus niños las bases necesarias para avanzar hacia el estudio de los demás conjuntos numéricos (enteros, racionales, irracionales, reales) y otros temas de la aritmética (números primos y compuestos, descomposición de números en factores primos, potenciación, radicación, logaritmación, razones, proporciones, reglas de tres, porcentajes y sus respectivos problemas de aplicación, entre otros). Los maestros tienen la libertad de enriquecer las clases aquí planteadas con más ejemplos o motivaciones al inicio de las mismas, de acuerdo con su experiencia y los intereses de sus estudiantes.

Espero que para los maestros de Matemáticas del Departamento de Antioquia este documento sea agradable y útil para apoyar su valiosa actividad docente.

El Autor

Lección 1

Generalidades sobre los números naturales

Desde los tiempos más remotos, el hombre siempre ha tenido necesidades de diversa índole que han puesto a prueba su creatividad e ingenio para lograr satisfacerlas: obtener el alimento diario; construir una vivienda para refugiarse junto con su familia; usar vestido para protegerse del sol, la lluvia o el frío; diseñar herramientas para cultivar, artefactos para cazar o pescar, armas para defenderse; crear formas de comunicarse con los demás, entre otras.

En la medida en que el ser humano iba solucionando sus requerimientos básicos o de otro orden, también llegó el momento de saber cuántas cosas había a su alrededor. Por ejemplo, cuántas personas conformaban su familia, cuántas naranjas recolectó en una mañana, o cuántas gallinas tenía en su patio. Fue allí cuando el hombre comenzó a contar objetos, utilizando para ello sus dedos, piedritas o marcas en alguna superficie, y después ideó los **NÚMEROS NATURALES** para representar gráficamente dichas cantidades de la naturaleza.

Los números naturales forman un conjunto que se simboliza con la letra "$\mathbb{N}$" y se puede indicar así:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$

Como podemos observar, el conjunto de los números naturales comienza con el cero y después del 12 hay puntos suspensivos, lo cual quiere decir que ese listado continúa y nunca termina. Se trata entonces de un conjunto infinito, porque no podemos establecer cuántos elementos tiene. Siempre después de un número natural habrá otro que le sigue, y eso hace que la lista de números naturales sea interminable.

Muchas veces se ha discutido si el cero pertenece o no al conjunto de los números naturales. Unos autores dicen que sí, otros dicen que no. En realidad no vale la pena detenernos en esa discusión y simplemente vamos a aceptar el cero como el número natural que representa la ausencia de cantidad.

Si elegimos cualquier número natural diferente de cero, vemos que hay un número que va antes y otro que va después. El que va antes se llama **ANTECESOR** y el que va después se llama **SUCESOR** del número natural seleccionado.

Ejemplo 1.1

Si escogemos el número 7, entonces su antecesor es 6 porque es el número natural que va antes y su sucesor es 8 porque es el número natural que va después.

Ejemplo 1.2

Si escogemos el número 94, su antecesor es 93 y su sucesor es 95.

Ejemplo 1.3

Si escogemos el número 300, su antecesor es 299 y su sucesor es 301.

Al **SUCESOR** de un número natural también se le conoce con el nombre de **CONSECUTIVO**. Entonces, el consecutivo de 1.402 es 1.403 porque es el número natural que le sigue.

Cabe anotar que cero es el único número que no tiene antecesor en el conjunto de los naturales. En cambio, sí podemos afirmar que todos los números naturales tienen sucesor o consecutivo.

En el conjunto de los números naturales es muy importante destacar el subconjunto de números que tienen una sola cifra y que se llaman **DÍGITOS**. Podemos denotarlo con la letra D:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

La palabra "dígitos" proviene del griego "daktilos" que quiere decir "dedos". Como puede observarse en el conjunto D, los dígitos son 10 así como tenemos 10 dedos en nuestras manos. Por eso se habla de "huellas digitales" o "huellas dactilares" haciendo referencia a las marcas que tenemos en las yemas de nuestros dedos; o también usamos la frase "digitar un documento", cuando nos referimos a que vamos a usar el teclado de un computador con nuestros dedos para escribir un texto.

Con los dígitos podemos formar cualquier número natural, sin importar cuántas cifras tenga. Es lo mismo que hacemos cuando usamos una calculadora o un teléfono celular, dispositivos que cuentan con 10 teclas numeradas desde el 0 hasta el 9.

Cuando empleamos varios dígitos para formar un número natural, cada uno adquiere diferente valor según el lugar que ocupe en el número. Esto es lo que se llama **VALOR POSICIONAL** de cada cifra o cada dígito.

Es importante advertir que si el cero va a la izquierda del número formado entonces carece de valor y puede despreciarse, como el caso del número 08 que puede escribirse simplemente como 8.

Ejemplo 1.4

Con los dígitos 3 y 7 podemos formar el número natural 37; y, aunque 3 es menor que 7 (lo cual se simboliza $3 < 7$), en el número 37 el dígito 3 tiene mayor valor posicional que 7. Esto se explica porque 3 ocupa la casilla de las decenas, mientras que 7 ocupa el lugar de las unidades. Recordemos que 3 decenas equivalen a 30 unidades, y esa cantidad es mayor que 7 unidades. Simbólicamente: $3\ D > 7\ U$ porque $30\ U > 7\ U$.

Veamos lo anterior en una tabla:

Decenas	Unidades
D	U
3	7

Podemos decir entonces que el número treinta y siete (37) se compone de tres decenas (3 D) y siete unidades (7 U), o también que es la reunión de un grupo de treinta unidades (30 U) y otro grupo más pequeño de siete unidades (7 U).

Ejemplo 1.5

Con los dígitos $2, 5, 8, 7$ y 3 podemos formar el número 25.873; y, aunque el dígito 2 es menor que el dígito 8 (simbólicamente $2 < 8$), en ese número el dígito 2 tiene mayor valor posicional que la cifra 8. Mientras que 2 ocupa el lugar de las decenas de mil, 8 ocupa la casilla que corresponde a las centenas. Recordemos que 2 decenas de mil equivalen a 20.000 unidades, y que 8 centenas equivalen a 800 unidades; como se sabe 20.000 unidades es una cantidad mayor que 800 unidades. Simbólicamente: $2\ DM > 8\ C$ porque $20.000\ U > 800\ U$.

Veamos lo anterior en una tabla:

Decenas de Mil	Unidades de Mil	Centenas	Decenas	Unidades
DM	UM	C	D	U
2	5	8	7	3

Podemos decir entonces que el número veinticinco mil ochocientos setenta y tres (25.873) se compone de dos decenas de mil (2 DM), cinco unidades de mil (5 UM), ocho centenas (8 C), siete decenas (7 D) y tres unidades (3 U).

O también, que el número veinticinco mil ochocientos setenta y tres (25.873) es la reunión de cinco grupos: uno de veinte mil unidades (20.000 U), otro de cinco mil unidades (5.000 U), otro de ochocientas unidades (800 U), otro de setenta unidades (70 U) y un grupo pequeño de tres unidades (3 U).

Ley de Tricotomía

Para los números naturales la Ley de Tricotomía dice lo siguiente: Siempre que hacemos la comparación de dos números naturales, se cumple una de las siguientes tres posibilidades:

- Que el primero sea mayor que ($>$) el segundo.
- Que el primero sea igual ($=$) al segundo.
- Que el primero sea menor que ($<$) el segundo.

Ejemplo 1.6

En cada caso vamos a escribir en el recuadro el símbolo mayor que (>), igual a (=) o menor que (<), según corresponda:

$$\begin{array}{ccc} 75 \square 79 & \qquad & 815 \square 815 \\ 1.723 \square 1.721 & & 247 \square 274 \\ 19.583 \square 19.583 & & 47.969 \square 47.696 \end{array}$$

Después de analizar cada situación, los resultados son los siguientes:

$$\begin{array}{rclcrcl} 75 & < & 79 & \qquad & 815 & = & 815 \\ 1.723 & > & 1.721 & & 247 & < & 274 \\ 19.583 & = & 19.583 & & 47.969 & > & 47.696 \end{array}$$

Operaciones básicas con los números naturales

En el conjunto de los números naturales, hay cuatro operaciones básicas que debemos distinguir y dominar muy bien. Son ellas:

- La suma.
- La resta.
- La multiplicación.
- La división.

No sólo son importantes para avanzar con éxito en el estudio de las matemáticas sino porque se aplican en la solución de diversos problemas relacionados con situaciones de nuestra vida cotidiana. En las clases siguientes veremos detalladamente cada una de estas operaciones básicas con números naturales.

Lección 2

La operación suma

La Suma también se conoce con el nombre de Adición, se representa con el signo "más" (+) y es la operación que nos permite hallar el total de agrupar o reunir los elementos de dos o más conjuntos, representados en este caso por números naturales. Los números que participan en la operación suma se llaman **SUMANDOS** y el total que obtenemos se llama **RESULTADO** o **SUMA**.

Ejemplo 2.1

Si reunimos un conjunto que posee 3 elementos con otro de 4 elementos, entonces tenemos un nuevo conjunto conformado por 7 elementos. En este caso hemos efectuado la operación suma o adición, y se simboliza como $3 + 4 = 7$. En ella, 3 y 4 son los sumandos, y 7 es el resultado o suma.

Para sumar números más grandes, lo recomendable es escribirlos en forma vertical, de modo que las unidades queden alineadas entre sí, lo mismo que las decenas, las centenas, las unidades de mil, etc.

Ejemplo 2.2

Veamos cómo efectuar la suma $134 + 25$. Escribimos los números en forma vertical:

$$\begin{array}{cccc} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & 1 & 3 & 4 \\ + & & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Si queremos, se puede llenar la casilla vacía con cero, así:

$$\begin{array}{cccc} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & 1 & 3 & 4 \\ + & 0 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Resolvemos la operación comenzando por la columna de las unidades: $4 + 5 = 9$. Entonces, escribimos el 9 debajo de la línea y en la columna correspondiente a las unidades:

$$\begin{array}{cccc} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & 1 & 3 & 4 \\ + & 0 & 2 & 5 \\ \hline & & & 9 \end{array}$$

Continuamos con la columna de las decenas: $3 + 2 = 5$. Entonces, escribimos el 5 debajo de la línea y en la columna que corresponde a las decenas:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & 1 & 3 & 4 \\ + & 0 & 2 & 5 \\ \hline & & 5 & 9 \end{array}$$

Terminamos con la columna las centenas: $1 + 0 = 1$. Entonces, escribimos el 1 debajo de la línea y en la columna correspondiente a las centenas:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & 1 & 3 & 4 \\ + & 0 & 2 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

Así hemos resuelto la adición. En ella, 134 y 25 son los sumandos, y 159 es el resultado o suma.

Si observamos con atención, en todo momento la suma de cada columna fue un número de una cifra (menor que 10), y por esa razón los resultados se escribieron directamente debajo de la línea. En el siguiente ejemplo vamos a ver cómo se debe proceder cuando en alguna de las sumas verticales se obtiene un número de dos cifras (igual o mayor que 10).

Ejemplo 2.3

Realicemos la suma $284 + 456$. Escribimos los números en forma vertical:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & 2 & 8 & 4 \\ + & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Comenzamos haciendo la suma de la columna de las unidades: $4+6 = 10$. Como el resultado obtenido tiene dos cifras, lo descomponemos así: 10 unidades equivalen a 1 decena y 0 unidades (1 D y 0 U). Luego escribimos el 0 debajo de la línea, en la columna de las unidades, y el 1 encima del 8 (en la columna de las decenas):

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & & 1 & \\ & 2 & 8 & 4 \\ + & 4 & 5 & 6 \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

Continuamos con la suma de los números que tenemos en la columna de las decenas: $1+8+5 = 14$. Como el resultado obtenido tiene dos cifras, lo descomponemos así: 14 decenas equivalen a 1 centena y 4 decenas (1 C y 4 D). Entonces escribimos el 4 debajo de la línea, en la columna de las decenas, y el 1 encima del 2 (en la columna de las centenas):

$$
\begin{array}{cccc}
 & C & D & U \\
 & 1 & 1 & \\
 & 2 & 8 & 4 \\
+ & 4 & 5 & 6 \\
\hline
 & & 4 & 0
\end{array}
$$

Terminamos resolviendo la suma de los números que tenemos en la columna de las centenas: $1 + 2 + 4 = 7$. Como el resultado obtenido tiene sólo una cifra (es menor que 10), no es necesario descomponerlo. Entonces se escribe directamente debajo de la línea, en la columna de las centenas:

$$
\begin{array}{cccc}
 & C & D & U \\
 & 1 & 1 & \\
 & 2 & 8 & 4 \\
+ & 4 & 5 & 6 \\
\hline
 & 7 & 4 & 0
\end{array}
$$

Así hemos terminado de efectuar la adición. En ella, 284 y 456 son los sumandos, y 740 es el resultado o suma.

Lección 3

Aplicaciones de la suma

En esta ocasión vamos a ver dos situaciones que involucran la suma de números naturales. Una de ellas es un ejercicio de comparación de cantidades representadas por sumas, y la otra es un problema donde debe realizarse una suma para responder al interrogante que allí se plantea. Como en ambas situaciones se presenta la suma de tres números naturales (y hasta el momento sólo hemos visto cómo sumar dos), entonces primero vamos a ver detalladamente un ejemplo de este tipo de operación (incluso con números más grandes que los que habíamos considerado en la clase anterior).

Ejemplo 3.1

Resolvamos la suma de tres números: $3.508 + 12.787 + 4.639$.

Solución

Escribimos las cantidades en forma vertical. Nótese que hemos dejado una columna para marcar el punto que indica los miles:

$$\begin{array}{cccccc} & \text{DM} & \text{UM} & . & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & & 3 & . & 5 & 0 & 8 \\ & 1 & 2 & . & 7 & 8 & 7 \\ + & & 4 & . & 6 & 3 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Podemos llenar con ceros los espacios vacíos, así:

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{DM} & \text{UM} & . & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & 0 & 3 & . & 5 & 0 & 8 \\ & 1 & 2 & . & 7 & 8 & 7 \\ + & 0 & 4 & . & 6 & 3 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Comenzamos con la suma de la columna de las unidades: $8 + 7 + 9 = 24$. Como el resultado obtenido tiene dos cifras, lo descomponemos así: 24 unidades equivalen a 2 decenas y 4 unidades (2 D y 4 U). Luego escribimos el 4 debajo de la línea, en la columna de las unidades, y el 2 encima del 0 (en la columna de las decenas):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{DM} & \text{UM} & . & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & & & & & 2 & \\
 & 0 & 3 & . & 5 & 0 & 8 \\
 & 1 & 2 & . & 7 & 8 & 7 \\
+ & 0 & 4 & . & 6 & 3 & 9 \\
\hline
 & & & & & & 4
\end{array}$$

Continuamos con la suma de los números que tenemos en la columna de las decenas: $2 + 0 + 8 + 3 = 13$. Como 13 decenas equivalen a 1 centena y 3 decenas (1 C y 3 D), entonces escribimos el 3 debajo de la línea, en la columna de las decenas, y el 1 encima del 5 (en la columna de las centenas):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{DM} & \text{UM} & . & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & & & & 1 & 2 & \\
 & 0 & 3 & . & 5 & 0 & 8 \\
 & 1 & 2 & . & 7 & 8 & 7 \\
+ & 0 & 4 & . & 6 & 3 & 9 \\
\hline
 & & & & & 3 & 4
\end{array}$$

Ahora sumamos los números que tenemos en la columna de las centenas: $1 + 5 + 7 + 6 = 19$. Como 19 centenas equivalen a 1 unidad de mil y 9 centenas (1 UM y 9 C), entonces escribimos el 9 debajo de la línea, en la columna de las centenas, y el 1 encima del 3 (en la columna de las unidades de mil):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{DM} & \text{UM} & . & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & & 1 & & 1 & 2 & \\
 & 0 & 3 & . & 5 & 0 & 8 \\
 & 1 & 2 & . & 7 & 8 & 7 \\
+ & 0 & 4 & . & 6 & 3 & 9 \\
\hline
 & & & & 9 & 3 & 4
\end{array}$$

Continuamos con la suma de los números que tenemos en la columna de las unidades de mil: $1 + 3 + 2 + 4 = 10$. Como 10 unidades de mil es 1 decena de mil y 0 unidades de mil (1 DM y 0 UM), entonces escribimos el 0 debajo de la línea, en la columna de las unidades de mil, y el 1 encima del 0 (en la columna de las decenas de mil). También marcamos el punto que indica los miles:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{DM} & \text{UM} & . & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & 1 & 1 & & 1 & 2 & \\
 & 0 & 3 & . & 5 & 0 & 8 \\
 & 1 & 2 & . & 7 & 8 & 7 \\
+ & 0 & 4 & . & 6 & 3 & 9 \\
\hline
 & & 0 & . & 9 & 3 & 4
\end{array}$$

Por último resolvemos la suma de los números que tenemos en la columna de las decenas de mil: $1 + 0 + 1 + 0 = 2$. Por ser un resultado de una cifra (menor que 10), no hay que descomponerlo y se escribe directamente debajo de la línea, en la columna de las decenas de mil:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & DM & UM & . & C & D & U \\
 & 1 & 1 & & 1 & 2 & \\
 & 0 & 3 & . & 5 & 0 & 8 \\
 & 1 & 2 & . & 7 & 8 & 7 \\
+ & 0 & 4 & . & 6 & 3 & 9 \\
\hline
 & 2 & 0 & . & 9 & 3 & 4
\end{array}
$$

Así terminamos la adición de esos tres números naturales. En ella, $3.508, 12.787$ y 4.639 son los sumandos, y 20.934 es el resultado o suma.

Ahora sí veamos las dos situaciones planteadas al inicio de la clase, donde se aplica la suma de números naturales. En ellas debemos seguir los procedimientos que vimos en los ejemplos de la clase anterior (donde se suman dos números) y el que acabamos de ver en el ejemplo 3.1 (para sumar tres números).

Ejemplo 3.2

En cada caso vamos a escribir en el recuadro el símbolo mayor que ($>$), igual a ($=$) o menor que ($<$), según corresponda. Las operaciones deben realizarse a mano, en forma vertical y siguiendo los procedimientos descritos anteriormente.

$$
\begin{aligned}
107 + 646 &\ \square\ 381 + 374 \\
5.338 + 3.618 &\ \square\ 2.603 + 4.516 + 1.836 \\
5.762 + 10.804 + 724 &\ \square\ 13.873 + 3.417
\end{aligned}
$$

Solución

En la primera fila tenemos:

- En la columna izquierda: $107 + 646 = 753$.
- En la columna derecha: $381 + 374 = 755$.

Como 753 es menor que 755 entonces escribimos el símbolo $<$ dentro del recuadro.

En la segunda fila tenemos:

- En la columna izquierda: $5.338 + 3.618 = 8.956$.
- En la columna derecha: $2.603 + 4.516 + 1.836 = 8.955$.

Como 8.956 es mayor que 8.955 entonces escribimos el símbolo $>$ dentro del recuadro.

En la tercera fila tenemos:

- En la columna izquierda: $5.762 + 10.804 + 724 = 17.290$.
- En la columna derecha: $13.873 + 3.417 = 17.290$.

Como se obtienen cantidades iguales entonces escribimos el símbolo $=$ dentro del recuadro.

En definitiva, el ejercicio resuelto queda así:

$$\begin{aligned} 107 + 646 &< 381 + 374 \\ 5.338 + 3.618 &> 2.603 + 4.516 + 1.836 \\ 5.762 + 10.804 + 724 &= 13.873 + 3.417 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3

La siguiente tabla muestra la producción de bombillos de una fábrica en los primeros tres meses de cierto año. Si la meta de la empresa en ese período de tiempo era fabricar 125.000 bombillos, ¿Se cumplió dicho objetivo?

Mes	Bombillos producidos
Enero	32.583
Febrero	47.496
Marzo	45.312

Solución

Para resolver este problema debemos sumar las cantidades que aparecen en la tabla: $32.583 + 47.496 + 45.312 = 125.391$ (el procedimiento debe realizarse en forma vertical, según lo expuesto en el ejemplo 3.1).

Esto quiere decir que en el primer trimestre del año la empresa fabricó 125.391 bombillos, dicha cantidad es mayor que la meta trazada de 125.000 bombillos. Simbólicamente: $125.391 > 125.000$.

Tenemos entonces que la empresa sí cumplió su objetivo o meta de producción.

Lección 4

Propiedades de la suma

En la suma de números naturales existen unas propiedades o "reglas de juego" que debemos conocer y distinguir muy bien. Ellas son:

- La propiedad Clausurativa.
- La propiedad Conmutativa.
- La propiedad Asociativa.
- La propiedad Modulativa.

A continuación veremos cada una de ellas.

Propiedad Clausurativa

Dice: "La suma de números naturales siempre da como resultado un número natural".

A esta propiedad también se le conoce como **Propiedad de la Cerradura** y lo que nos indica es que la suma de números naturales es una operación cerrada en ese conjunto numérico, pues siempre que sumemos dos o más números naturales vamos a obtener como resultado un número natural.

Ejemplo 4.1

En la operación $37 + 54 = 91$, los sumandos (es decir 37 y 54) son números naturales y el resultado o suma (o sea 91) también es un número natural.

Ejemplo 4.2

En la operación $145+875+346 = 1.366$, los sumandos (es decir 145, 875 y 346) son números naturales y el resultado o suma (o sea 1.366) también es un número natural.

Propiedad Conmutativa

Dice: "El orden de los sumandos no altera el resultado".

Esta propiedad nos da la libertad de realizar una suma en cualquier orden, con la tranquilidad de que el resultado siempre será el mismo.

Ejemplo 4.3

Si efectuamos $8+9$ obtenemos 17, y si cambiamos el orden de los sumandos, es decir $9+8$, también el resultado es 17. Entonces: $8+9=9+8=17$.

Ejemplo 4.4

Si efectuamos $13+25+47$ obtenemos 85. Si resolvemos la suma en otro orden, como $47+13+25$ u otro diferente, el resultado también es 85. Esto confirma que se cumple la propiedad conmutativa: $13+25+47=47+13+25=85$.

Propiedad Asociativa

Dice: "El resultado de sumar tres o más números es el mismo, independientemente de la manera como se asocien o agrupen".

Esta propiedad nos permite formar grupos o asociaciones de números cuando tenemos que sumar tres o más cantidades. Para ello utilizamos PARÉNTESIS ( ), CORCHETES [ ] o LLAVES { }, que son los signos de agrupación adecuados para este propósito. Por lo general, se acostumbra usar PARÉNTESIS ( ) para asociar números naturales en la suma.

Ejemplo 4.5

Si nos piden resolver $16+18+25$ podemos aplicar la propiedad asociativa, de dos maneras:

- En la primera, agrupamos los dos primeros sumandos: $(16+18)+25$. Procedemos a resolver primero lo que tenemos dentro del paréntesis: $16+18$ que nos da 34. Entonces, la operación se reduce a $34+25$ y esto nos da como resultado 59.

  Simbólicamente, la secuencia anterior queda expresada así:

  $$16+18+25=(16+18)+25=34+25=59.$$

  Nótese que al escribir el resultado de la suma encerrada en paréntesis, o sea 34, éstos inmediatamente desaparecen.

- Ahora veamos la segunda forma, donde vamos a asociar los dos últimos sumandos: $16+(18+25)$. Nuevamente le damos prioridad a la operación encerrada en paréntesis, es decir $18+25$ que nos da 43. Luego, la suma queda reducida a $16+43$, y el resultado es 59.

  La secuencia anterior, expresada en términos simbólicos, queda así:

  $$16+18+25=16+(18+25)=16+43=59.$$

  Así comprobamos que, sin importar cómo hagamos la asociación o agrupación de números, el resultado debe ser el mismo.

  Simbólicamente:

  $$(16+18)+25=16+(18+25).$$

Ejemplo 4.6

Si nos piden resolver $14 + 23 + 35 + 19$ podemos aplicar la propiedad asociativa, de cuatro formas distintas:

- En la primera, agrupamos los dos primeros y los dos últimos sumandos: $(14 + 23) + (35+19)$. Ahora resolvemos dichas operaciones que encerramos con paréntesis: $14+21$ que nos da 37, y $35 + 19$ que nos da 54. Entonces, la operación se reduce a $37 + 54$ y esto nos da como resultado 91.

  Simbólicamente, la secuencia anterior queda expresada así:

  $$14 + 23 + 35 + 19 = (14 + 23) + (35 + 19) = 37 + 54 = 91.$$

- En la segunda forma, agrupamos los tres primeros sumandos: $(14 + 23 + 35) + 19$. Resolviendo la operación que encerramos en paréntesis, es decir $14+23+35$, obtenemos 72. Luego, la operación queda reducida a $72 + 19$, y efectuándola nos da 91.

  Simbólicamente, la secuencia anterior queda expresada así:

  $$14 + 23 + 35 + 19 = (14 + 23 + 35) + 19 = 72 + 19 = 91.$$

- En la tercera forma, agrupamos los tres últimos sumandos: $14 + (23 + 35 + 19)$. Efectuando esa operación que encerramos en paréntesis, es decir $23 + 35 + 19$, obtenemos 77. Entonces, la operación se reduce a $14 + 77$, y resolviéndola nos da 91.

  Simbólicamente, la secuencia anterior queda expresada así:

  $$14 + 23 + 35 + 19 = 14 + (23 + 35 + 19) = 14 + 77 = 91.$$

- En la cuarta forma, agrupamos los dos sumandos centrales: $14 + (23 + 35) + 19$. Resolviendo esa operación que encerramos con paréntesis, es decir $23 + 35$, obtenemos 58. Entonces, la operación se reduce a $14 + 58 + 19$, y resolviéndola en forma directa nos da 91. Cabe anotar que si lo deseamos, en esta última suma podemos aplicar de nuevo la propiedad asociativa, bien sea $(14 + 58) + 19$ o $14 + (58 + 19)$.

  Simbólicamente, la secuencia anterior queda expresada así:

  $$14 + 23 + 35 + 19 = 14 + (23 + 35) + 19 = 14 + 58 + 19 = 91.$$

  De lo anterior podemos concluir que

  $$(14+23)+(35+19) = (14+23+35)+19 = 14+(23+35+19) = 14+(23+35)+19.$$

  Como se observa, si tenemos cuatro sumandos (o más) podemos aplicar la propiedad asociativa de diversas maneras. Lo que buscamos con eso es facilitar el proceso de suma o adición de las cantidades pues resulta más sencillo y seguro hacerlo por grupos que sumarlas directamente.

Propiedad Modulativa

Dice: “Al sumar cualquier número natural con CERO se obtiene el mismo número natural”.

Esta propiedad también se conoce con el nombre de **Propiedad del Elemento Neutro** pues se considera el CERO como el módulo o elemento neutro de la operación suma. Cuando el CERO participa como sumando, no modifica el resultado.

Ejemplo 4.7

$5 + 0 = 5$.
$0 + 12 = 12$.
$28 + 0 + 16 = 44$.
$35 + 17 + 0 = 52$.

Lección 5

La operación resta

La Resta también se conoce con el nombre de Sustracción, se representa con el signo "menos" ($-$), y es la operación que nos permite averiguar cuánto queda después de quitar o retirar una cantidad (en este caso representada por un número natural) a otra que es igual o más grande. Los números que participan en la operación resta o sustracción son tres: El MINUENDO, el SUSTRAENDO (la cantidad que se le quita o sustrae al minuendo) y la DIFERENCIA (el resultado que queda después de realizar la operación).

Como se acaba de afirmar, es muy importante que el minuendo sea igual o mayor que el sustraendo (simbólicamente: minuendo $\geq$ sustraendo) para que la operación resta sea posible en el conjunto de los números naturales. Si por alguna razón nos encontramos con la situación contraria (minuendo menor que el sustraendo, o en símbolos: minuendo $<$ sustraendo) entonces simplemente concluimos que esa operación no se puede resolver por ahora, en el contexto de los números naturales.

Por otro lado, toda resta o sustracción puede ser probada para verificar si quedó bien resuelta.

La prueba de la resta consiste en sumar la DIFERENCIA con el SUSTRAENDO, y debemos obtener como resultado el MINUENDO.

En síntesis.

Operación resta:

$$\text{MINUENDO} - \text{SUSTRAENDO} = \text{DIFERENCIA.}$$

Prueba de la resta:

$$\text{DIFERENCIA} + \text{SUSTRAENDO} = \text{MINUENDO.}$$

Ejemplo 5.1

Si tenemos la operación $8 - 2 = 6$ entonces 8 es el minuendo, 2 es el sustraendo y 6 es la diferencia. Como se observa, el minuendo es mayor que el sustraendo ($8 > 2$) y por eso la resta puede efectuarse sin ningún inconveniente en el conjunto de los números naturales.

También podemos escribir la operación en forma vertical:

$$\begin{array}{rrcc} & 8 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\ - & 2 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\ \hline & 6 & \rightarrow & \text{Diferencia} \end{array}$$

Esta situación puede venir formulada de dos maneras:

- "De 8 restar 2" o "De 8 sustraer 2".
- "Restar 2 de 8" o "Sustraer 2 de 8".

Como se observa, siempre el número que va después de la palabra "De" es el minuendo, y el que va después de la palabra "Restar" o "Sustraer" es el sustraendo.

Ahora, para nuestra tranquilidad, hacemos la prueba de la resta: $6 + 2 = 8$. Como al sumar la diferencia (6) con el sustraendo (2) obtenemos el minuendo (8) entonces concluimos que la operación se resolvió correctamente.

Ejemplo 5.2

"De 7 restar 3" se traduce en la operación $7 - 3$ y, al resolverla, obtenemos 4. En este caso, 7 es el minuendo, 3 es el sustraendo y 4 es la diferencia. Entonces, simbólicamente podemos escribirla:

- En forma horizontal: $7 - 3 = 4$.
- En forma vertical:

$$\begin{array}{rrcc} & 7 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\ - & 3 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\ \hline & 4 & \rightarrow & \text{Diferencia} \end{array}$$

Para mayor tranquilidad, hacemos la prueba de la resta: $4 + 3 = 7$. Como efectivamente obtuvimos el minuendo (7), entonces podemos asegurar que la operación se efectuó en forma correcta.

Si vamos a resolver una resta con números más grandes, lo conveniente es escribirlos en forma vertical, de modo que las unidades queden alineadas entre sí, lo mismo que las decenas, las centenas, las unidades de mil, etc.

Ejemplo 5.3

El pedido "Restar 25 de 65" corresponde a la operación $65 - 25$. Como el minuendo es mayor que el sustraendo entonces la resta es posible en el contexto de los números naturales, y para resolverla se escribe en forma vertical:

$$\begin{array}{rcccc} & \text{D} & \text{U} & & \\ & 6 & 5 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\ - & 2 & 5 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\ \hline \end{array}$$

Comenzamos por efectuar la operación de la columna de las unidades: $5 - 5 = 0$. Entonces, escribimos el 0 debajo de la línea y en la columna correspondiente a las unidades:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{D} & \text{U} & & \\
 & 6 & 5 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\
- & 2 & 5 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\
\hline
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Ahora realizamos la resta correspondiente a la columna de las decenas: $6 - 2 = 4$. Entonces, escribimos el 4 debajo de la línea y en la columna correspondiente a las decenas:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{D} & \text{U} & & \\
 & 6 & 5 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\
- & 2 & 5 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\
\hline
 & 4 & 0 & &
\end{array}
$$

Así hemos resuelto la resta o sustracción. En ella, 65 es el minuendo, 25 es el sustraendo y 40 es la diferencia:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{D} & \text{U} & & \\
 & 6 & 5 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\
- & 2 & 5 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\
\hline
 & 4 & 0 & \rightarrow & \text{Diferencia}
\end{array}
$$

Para mayor tranquilidad, hacemos la prueba respectiva: efectuamos la suma $40 + 25$ y obtenemos como resultado 65, que es el minuendo. De esta manera verificamos que la operación realizada es correcta.

Si observamos con atención en el ejemplo que acabamos de resolver, en todo momento la resta de cada columna no tuvo inconveniente gracias a que el minuendo siempre fue igual o mayor que el sustraendo, y por esa razón los resultados se escribieron directamente debajo de la línea. En la clase siguiente veremos cómo proceder cuando en alguna de las columnas el minuendo es menor que el sustraendo.

Lección 6

“Préstamos” en la resta

Hay ocasiones en que, al efectuar una resta en forma vertical, no podemos proceder porque tenemos que en una de las columnas el minuendo es menor que el sustraendo. Es allí cuando la cifra que tiene problemas en el minuendo debe “pedir un préstamo” o “pedirle prestado” a su vecina de la izquierda, para poder solucionar ese inconveniente y así continuar con el desarrollo de la operación. Esta estrategia es la que veremos en esta clase, junto con la aplicación de la resta en la comparación de cantidades y en una situación problema de la cotidianidad.

Ejemplo 6.1

La situación “De 472 sustraer 385” corresponde a la operación $472 - 385$. Como el minuendo es mayor que el sustraendo entonces la resta o sustracción es posible en el contexto de los números naturales, y para resolverla se escribe en forma vertical:

$$\begin{array}{ccccrc} & C & D & U & & \\ & 4 & 7 & 2 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\ - & 3 & 8 & 5 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\ \hline \end{array}$$

Comenzamos por efectuar la operación de la columna de las unidades $2 - 5$, pero allí tenemos un impedimento: el minuendo (2) es menor que el sustraendo (5), luego no es posible quitarle 5 a 2. Para solucionar este inconveniente hacemos lo siguiente en el minuendo: el dígito 7 de las decenas lo descomponemos como $6 + 1$; transferimos el 1 (que corresponde a 1 decena o 10 unidades) al dígito de la derecha, de modo que a las 2 unidades que tenemos allí le llegan 10 unidades más, quedando $2 + 10 = 12$; entonces, tachamos el 2 y encima escribimos el 12. Terminamos esa maniobra actualizando la cifra de las decenas: tachamos el 7 y escribimos en su lugar el 6:

$$\begin{array}{cccc} & C & D & U \\ & & 6 & 12 \\ & 4 & \cancel{7} & \cancel{2} \\ - & 3 & 8 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Lo que ha sucedido también se puede expresar en estas palabras: “Como a 2 no le podemos restar 5, entonces le pedimos a la cifra de la izquierda (o sea 7) que nos preste 1 decena para ayudarle a las unidades. Así, 2 se convierte en 12 y 7, como prestó 1, queda reducido a 6”.

Habiendo solucionado el problema en la columna de las unidades, efectuamos la resta que nos quedó allí: $12 - 5 = 7$. Entonces, escribimos el 7 debajo de la línea y en dicha columna:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & & 6 & 12 \\ & 4 & \cancel{7} & \cancel{2} \\ - & 3 & 8 & 5 \\ \hline & & & 7 \end{array}$$

Ahora pasamos a la columna de las decenas, donde debemos resolver la operación $6-8$. Como se observa, tampoco es posible efectuarla porque el minuendo (6) es menor que el sustraendo (8). Procedemos a solucionar este inconveniente aplicando la misma estrategia que usamos en la etapa anterior: en el minuendo, el dígito 4 de las centenas lo descomponemos como $3 + 1$; transferimos el 1 (que corresponde a 1 centena o 10 decenas) al dígito de la derecha, de modo que a las 6 decenas que hay allí le llegan 10 decenas más, quedando $6 + 10 = 16$; entonces, tachamos el 6 y encima escribimos el 16. Para terminar el ajuste, actualizamos la cifra de las centenas tachando el 4 y escribiendo en su lugar el 3:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & & 16 & \\ & 3 & \cancel{6} & 12 \\ & \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{2} \\ - & 3 & 8 & 5 \\ \hline & & & 7 \end{array}$$

Esto que acabamos de hacer también se puede resumir en estas palabras: "Como a 6 no se le puede quitar 8 entonces al 4 le pedimos prestada 1 centena para ayudarle a las decenas. Así, 6 se convierte en 16 y 4 es sustituido por 3".

Habiendo dado solución al problema en la columna de las decenas, resolvemos la resta que nos quedó allí: $16 - 8 = 8$. Entonces, escribimos el 8 debajo de la línea y en dicha columna:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & & 16 & \\ & 3 & \cancel{6} & 12 \\ & \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{2} \\ - & 3 & 8 & 5 \\ \hline & & 8 & 7 \end{array}$$

A continuación pasamos a la columna de las centenas, donde perfectamente podemos realizar la resta que tenemos allí: $3 - 3 = 0$. Escribimos entonces el 0 debajo de la línea y en dicha columna:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & & 16 & \\ & 3 & \cancel{6} & 12 \\ & \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{2} \\ - & 3 & 8 & 5 \\ \hline & 0 & 8 & 7 \end{array}$$

De esta forma hemos resuelto la resta o sustracción. En ella, 472 es el minuendo, 385 es el sustraendo y 87 es la diferencia:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & C & D & U & & \\
 & 4 & 7 & 2 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\
- & 3 & 8 & 5 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\
\hline
 & & 8 & 7 & \rightarrow & \text{Diferencia}
\end{array}
$$

Para nuestra tranquilidad, hacemos la prueba de la resta: efectuamos la suma $87 + 385$ y obtenemos como resultado 472, que es el minuendo. Así verificamos que la operación realizada es correcta.

Ejemplo 6.2

En cada caso vamos a escribir en el recuadro el símbolo mayor que ($>$), igual a ($=$) o menor que ($<$), según corresponda. Las operaciones deben realizarse a mano, en forma vertical y siguiendo los procedimientos descritos anteriormente.

$$
\begin{array}{r}
753 - 241 \square 894 - 382 \\
8.506 - 4.703 \square 7.048 - 3.243 \\
23.417 - 16.589 \square 21.332 - 14.505
\end{array}
$$

En la primera fila tenemos:

- En la columna izquierda: $753 - 241 = 512$.
- En la columna derecha: $894 - 382 = 512$.

Como son resultados iguales entonces escribimos el símbolo $=$ dentro del recuadro.

En la segunda fila tenemos:

- En la columna izquierda: $8.506 - 4.703 = 3.803$.
- En la columna derecha: $7.048 - 3.243 = 3.805$.

Como 3.803 es menor que 3.805 entonces escribimos el símbolo $<$ dentro del recuadro.

En la tercera fila tenemos:

- En la columna izquierda: $23.417 - 16.589 = 6.828$.
- En la columna derecha: $21.332 - 14.505 = 6.827$.

Como 6.828 es mayor que 6.827 entonces escribimos el símbolo $>$ dentro del recuadro.

En definitiva, el ejercicio resuelto queda así:

$$
\begin{array}{rcl}
753 - 241 & = & 894 - 382 \\
8.506 - 4.703 & < & 7.048 - 3.243 \\
23.417 - 16.589 & > & 21.332 - 14.505
\end{array}
$$

Ejemplo 6.3

En el supermercado hice una compra por valor de \$37.450. Si pagué con un billete de \$50.000, ¿Cuánto dinero me sobró?

Para resolver este problema, debemos efectuar la resta $50.000 - 37.450$ y vamos a proceder en forma vertical:

$$\begin{array}{cccccccc} & DM & UM & . & C & D & U & & \\ & 5 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & \rightarrow & \text{Minuendo} \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 & \rightarrow & \text{Sustraendo} \\ \hline \end{array}$$

Como se observa, en la columna de las unidades debemos efectuar la resta $0-0$ y eso nos da como resultado 0. Escribimos ese número debajo de la línea y en la columna respectiva:

$$\begin{array}{ccccccc} & DM & UM & . & C & D & U \\ & 5 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}$$

Al pasar a la siguiente columna (la de las decenas) encontramos la resta $0-5$ que no se puede resolver. Si observamos a la izquierda, tenemos 0 tanto en la cifra de las centenas como en la cifra de las unidades de mil; recordemos que cero indica ausencia de cantidad, y debido a ello esas cifras no pueden hacer ningún tipo de préstamo. Recurrimos entonces a la cifra 5 de las decenas de mil: a ella le pedimos prestada 1 decena de mil (es decir 10 unidades de mil) para adicionarla a la cifra de las unidades de mil. Así, 0 unidades de mil quedan convertidas en 10 unidades de mil, y 5 decenas de mil se reducen a 4 decenas de mil:

$$\begin{array}{ccccccc} & DM & UM & . & C & D & U \\ & 4 & 10 & & & & \\ & \cancel{5} & \cancel{0} & . & 0 & 0 & 0 \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}$$

Ahora, a las 10 unidades de mil le pedimos prestada 1 unidad de mil (es decir 10 centenas) para sumársela a la cifra de las centenas. De esta manera, 0 centenas quedan convertidas en 10 centenas y 10 unidades de mil se reducen a 9 unidades de mil:

$$\begin{array}{ccccccc} & DM & UM & . & C & D & U \\ & & 9 & & & & \\ & 4 & \cancel{10} & & 10 & & \\ & \cancel{5} & \cancel{0} & . & \cancel{0} & 0 & 0 \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}$$

Enseguida, a las 10 centenas le solicitamos un préstamo de 1 centena (es decir 10 decenas) para colaborarle a la cifra de las decenas. Con esto, 0 decenas quedan convertidas en 10 decenas y 10 centenas se reducen a 9 centenas:

$$\begin{array}{cccccc} & DM & UM & . & C & D & U \\ & & 9 & & 9 & & \\ & 4 & \cancel{10} & & \cancel{10} & 10 & \\ & \cancel{5} & \cancel{0} & . & \cancel{0} & 0 & 0 \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}$$

Con estas modificaciones que hicimos al minuendo, ya se puede resolver la resta sin ningún problema. Efectuamos $10-5$ en la columna de las decenas: el resultado (que es 5) lo escribimos debajo de la línea en la columna correspondiente:

$$\begin{array}{cccccc} & DM & UM & . & C & D & U \\ & & 9 & & 9 & & \\ & 4 & \cancel{10} & & \cancel{10} & 10 & \\ & \cancel{5} & \cancel{0} & . & \cancel{0} & 0 & 0 \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 \\ \hline & & & & & 5 & 0 \end{array}$$

Pasamos a la columna de las centenas y resolvemos la resta $9-4$ cuyo resultado es 5. Ese número lo escribimos debajo de la línea en dicha columna:

$$\begin{array}{cccccc} & DM & UM & . & C & D & U \\ & & 9 & & 9 & & \\ & 4 & \cancel{10} & & \cancel{10} & 10 & \\ & \cancel{5} & \cancel{0} & . & \cancel{0} & 0 & 0 \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 \\ \hline & & & & 5 & 5 & 0 \end{array}$$

Vamos ahora a la columna de las unidades de mil, donde resolvemos la resta $9-7$. El resultado (que es 2) lo escribimos debajo de la línea en esa columna. También marcamos el punto que indica la posición de miles:

$$\begin{array}{cccccc} & DM & UM & . & C & D & U \\ & & 9 & & 9 & & \\ & 4 & \cancel{10} & & \cancel{10} & 10 & \\ & \cancel{5} & \cancel{0} & . & \cancel{0} & 0 & 0 \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 \\ \hline & & 2 & . & 5 & 5 & 0 \end{array}$$

Por último, resolvemos la resta $4-3$ que tenemos en la columna de las decenas de mil. El resultado (que es 1) lo escribimos debajo de la línea en la columna que corresponde:

$$\begin{array}{cccccc} & DM & UM & . & C & D & U \\ & & 9 & & 9 & & \\ & 4 & \cancel{10} & & \cancel{10} & 10 & \\ & \cancel{5} & \cancel{0} & . & \cancel{0} & 0 & 0 \\ - & 3 & 7 & . & 4 & 5 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & . & 5 & 5 & 0 \end{array}$$

De esta manera, hemos realizado completamente la resta:

	DM	UM	.	C	D	U		
	5	0	.	0	0	0	$\rightarrow$	Minuendo
$-$	3	7	.	4	5	0	$\rightarrow$	Sustraendo
	1	2	.	5	5	0	$\rightarrow$	Diferencia

Hacemos la prueba para tener mayor tranquilidad. Al efectuar $12.550 + 37.450$ obtenemos 50.000, o sea, el minuendo. Con eso verificamos que la operación se resolvió correctamente y finalizamos el problema.

Respuesta: Me sobró \$12.550.

Lección 7

La multiplicación por una cifra

La Multiplicación se representa con el signo "por", que se simboliza con una equis ($\times$) o con un punto ($\cdot$) y es la operación que nos permite hallar de manera rápida el total de sumar varias veces la misma cantidad. Por eso se dice que la multiplicación es una suma abreviada. Los números que participan en la operación multiplicación se llaman FACTORES y el resultado que obtenemos se llama PRODUCTO.

Ejemplo 7.1

La suma $2+2+2=6$ se puede abreviar, en palabras, como "3 veces 2 es 6", y en símbolos, como $3\times 2=6$ o también $3\cdot 2=6$. Se lee "3 por 2 es igual a 6" y constituye una multiplicación donde 3 y 2 son los factores, y 6 es el producto.

Ejemplo 7.2

La operación 4×3 o $4\cdot 3$ es una multiplicación que se lee "4 por 3" y quiere decir "4 veces 3", es decir $3+3+3+3$, que equivale a 12. Por lo tanto decimos que $4\times 3=4\cdot 3=12$, donde los factores son 4 y 3, y el producto es 12.

Ejemplo 7.3

5×7 o $5\cdot 7$ se lee "5 por 7" y significa "5 veces 7", o sea $7+7+7+7+7$, cuyo resultado es 35. Entonces afirmamos que $5\times 7=5\cdot 7=35$, donde 5 y 7 son los factores y 35 es el producto.

Con base en lo anterior, podemos saber el resultado de multiplicar dos dígitos, como por ejemplo 1×5 (1 vez 5, que es 5), 2×9 (2 veces 9, que es 18) o 6×8 (6 veces 8, que es 48).

Esos productos entre números de una cifra (o dígitos) conforman las famosas TABLAS DE MULTIPLICAR, que son la base para resolver multiplicaciones donde participan números más grandes.

Con práctica constante podemos lograr el objetivo de aprendernos de memoria las tablas de multiplicar. Y esto es necesario porque, a medida que avanzamos en el estudio de las matemáticas, aparecen operaciones de mayor complejidad que nos exigen rapidez y precisión cuando se trata de multiplicar dos dígitos. A continuación observamos las Tablas de Multiplicar, desde la tabla del 0 hasta la tabla del 9:

TABLA DEL 0	TABLA DEL 1	TABLA DEL 2	TABLA DEL 3	TABLA DEL 4
$0 \times 0 = 0$	$1 \times 0 = 0$	$2 \times 0 = 0$	$3 \times 0 = 0$	$4 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$	$1 \times 1 = 1$	$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 1 = 4$
$0 \times 2 = 0$	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$
$0 \times 3 = 0$	$1 \times 3 = 3$	$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$
$0 \times 4 = 0$	$1 \times 4 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$
$0 \times 5 = 0$	$1 \times 5 = 5$	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$
$0 \times 6 = 0$	$1 \times 6 = 6$	$2 \times 6 = 12$	$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$
$0 \times 7 = 0$	$1 \times 7 = 7$	$2 \times 7 = 14$	$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$
$0 \times 8 = 0$	$1 \times 8 = 8$	$2 \times 8 = 16$	$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$
$0 \times 9 = 0$	$1 \times 9 = 9$	$2 \times 9 = 18$	$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$

TABLA DEL 5	TABLA DEL 6	TABLA DEL 7	TABLA DEL 8	TABLA DEL 9
$5 \times 0 = 0$	$6 \times 0 = 0$	$7 \times 0 = 0$	$8 \times 0 = 0$	$9 \times 0 = 0$
$5 \times 1 = 5$	$6 \times 1 = 6$	$7 \times 1 = 7$	$8 \times 1 = 8$	$9 \times 1 = 9$
$5 \times 2 = 10$	$6 \times 2 = 12$	$7 \times 2 = 14$	$8 \times 2 = 16$	$9 \times 2 = 18$
$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$	$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$
$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$	$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$
$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$	$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$
$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$	$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$
$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$	$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$
$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$	$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$
$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$	$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$

Si vamos a multiplicar números más grandes, lo recomendable es efectuar la operación en forma vertical. Enseguida veremos cómo hacer este tipo de multiplicaciones por una cifra.

Ejemplo 7.4

Resolver 43×2. Escribimos la operación en forma vertical:

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & 4 & 3 \\ \times & & 2 \\ \hline \end{array}$$

Comenzamos multiplicando 2×3, cuyo resultado es 6. Entonces lo escribimos debajo de la línea, en la columna de las unidades:

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & 4 & 3 \\ \times & & 2 \\ \hline & & 6 \end{array}$$

Ahora efectuamos 2×4 y obtenemos 8 como resultado. Lo escribimos debajo de la línea, en la columna de las decenas:

$$
\begin{array}{rrr}
 & \text{D} & \text{U} \\
 & 4 & 3 \\
\times & & 2 \\
\hline
 & 8 & 6
\end{array}
$$

De esta manera terminamos de resolver la multiplicación, que puede expresarse como $43 \times 2 = 86$. En ella, 43 y 2 son los factores y 86 es el producto.

Ejemplo 7.5

Resolver 258×3. Escribimos la operación en forma vertical:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & 2 & 5 & 8 \\
\times & & & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Empezamos resolviendo 3×8, que nos da como resultado 24. Entonces descomponemos este número (que son 24 unidades) en 2 decenas y 4 unidades, para escribir el 4 debajo de la línea (en la columna de las unidades) y el 2 encima del 5 (en la columna de las decenas):

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & & 2 & \\
 & 2 & 5 & 8 \\
\times & & & 3 \\
\hline
 & & & 4
\end{array}
$$

Continuamos con la operación 3×5, que nos da como resultado 15. A ese número le sumamos el 2 que anotamos encima del 5. Tenemos: $15 + 2 = 17$. Entonces descomponemos ese número (que son 17 decenas) en 1 centena y 7 decenas, para escribir el 7 debajo de la línea (en la columna de las decenas) y el 1 encima del 2 que tenemos en la columna de las centenas:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & 1 & 2 & \\
 & 2 & 5 & 8 \\
\times & & & 3 \\
\hline
 & & 7 & 4
\end{array}
$$

Finalmente efectuamos 3×2, que nos da 6 como resultado. A ese número le sumamos el 1 que habíamos anotado encima del 2. Tenemos: $6 + 1 = 7$ (o sea 7 centenas). Entonces escribimos el 7 debajo de la línea, en la columna de las centenas:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & 1 & 2 & \\
 & 2 & 5 & 8 \\
\times & & & 3 \\
\hline
 & 7 & 7 & 4
\end{array}
$$

De este modo terminamos la multiplicación, que puede expresarse como $258 \times 3 = 774$. En ella, 258 y 3 son los factores y 774 es el producto.

Ejemplo 7.6

Resolver 549×7. Escribimos la operación en forma vertical:

$$\begin{array}{cccc} & C & D & U \\ & 5 & 4 & 9 \\ \times & & & 7 \\ \hline \end{array}$$

Iniciamos con la operación 7×9, que nos da como resultado 63. Entonces escribimos el 3 debajo de la línea (en la columna de las unidades) y el 6 encima del 4 (en la columna de las decenas):

$$\begin{array}{cccc} & C & D & U \\ & & 6 & \\ & 5 & 4 & 9 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & & 3 \end{array}$$

Enseguida efectuamos 7×4, que nos da como resultado 28. A ese número le debemos sumar el 6 que situamos encima del4. Tenemos: $28 + 6 = 34$. Entonces escribimos el 4 debajo de la línea (en la columna de las decenas) y el 3 encima del 5 que tenemos en la columna de las centenas:

$$\begin{array}{cccc} & C & D & U \\ & 3 & 6 & \\ & 5 & 4 & 9 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & 4 & 3 \end{array}$$

Por último resolvemos 7×5, que nos da 35. A ese número le sumamos el 3 que habíamos anotado encima del 5. Tenemos: $35 + 3 = 38$. Entonces escribimos directamente el 38 debajo de la línea, ubicando el dígito 8 en la columna de las centenas y el dígito 3 en la columna de las unidades de mil (la cual agregamos):

$$\begin{array}{ccccc} & UM & C & D & U \\ & & 3 & 6 & \\ & & 5 & 4 & 9 \\ \times & & & & 7 \\ \hline & 3 & 8 & 4 & 3 \end{array}$$

De este modo terminamos la multiplicación, que puede expresarse como $549 \times 7 = 3.843$. En ella, 549 y 7 son los factores y 3.843 es el producto.

Lección 8

La multiplicación por dos y tres cifras

En esta oportunidad vamos a ver, a través de ejemplos, cómo se realiza la multiplicación por números de dos y tres cifras.

Ejemplo 8.1

Resolver 697×45. Aquí tenemos la multiplicación por un número de dos cifras. Entonces escribimos la operación en forma vertical:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & 6 & 9 & 7 \\ \times & & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

En principio debemos efectuar la multiplicación 697×5, cuyo resultado va a localizarse debajo de la línea con su última cifra en la columna de las unidades. Esta operación la realizamos en varias etapas, como veremos enseguida:

Iniciamos resolviendo 5×7, que nos da como resultado 35. Entonces escribimos el 5 debajo de la línea (en la columna de las unidades) y el 3 encima del 9 (en la columna de las decenas):

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & & 3 & \\ & 6 & 9 & 7 \\ \times & & 4 & 5 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

Seguimos con la operación 5×9, que nos da como resultado 45. A ese número le debemos sumar el 3 que anotamos encima del 9. Tenemos: $45 + 3 = 48$. Entonces escribimos el 8 debajo de la línea (en la columna de las decenas) y el 4 encima del 6 que tenemos en la columna de las centenas:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ & 4 & 3 & \\ & 6 & 9 & 7 \\ \times & & 4 & 5 \\ \hline & & 8 & 5 \end{array}$$

Ahora efectuamos 5×6, que nos da 30 como resultado. A ese número le sumamos el 4 que habíamos anotado encima del 6. Tenemos: $30 + 4 = 34$. Entonces escribimos ese número debajo de la línea, ubicando el 4 en la columna de las centenas y el 3 en la columna de unidades de mil (la cual agregamos):

$$\begin{array}{ccccc} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & & 4 & 3 & \\ & & 6 & 9 & 7 \\ \times & & & 4 & 5 \\ \hline & 3 & 4 & 8 & 5 \end{array}$$

Procedemos a borrar los números que habíamos anotado encima del primer factor (697):

$$\begin{array}{ccccc} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & & 6 & 9 & 7 \\ \times & & & 4 & 5 \\ \hline & 3 & 4 & 8 & 5 \end{array}$$

A continuación vamos a repetir el procedimiento de multiplicación, con la cifra 4 del segundo factor (o sea 45). En otras palabras, vamos a efectuar 697×4 y el resultado lo vamos a escribir debajo del número 3.485, ubicando su última cifra en la columna de las decenas (es decir debajo del 8). Veamos cómo se hace esto detalladamente:

Multiplicamos 4×7 que nos da 28. Entonces, escribimos el 8 debajo del 8 y el 2 encima del 9, todo esto en la columna de las decenas:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & & & 2 & \\ & & 6 & 9 & 7 \\ \times & & & 4 & 5 \\ \hline & 3 & 4 & 8 & 5 \\ & & & 8 & \end{array}$$

Luego multiplicamos 4×9 y obtenemos 36. A ese número debemos sumarle el 2 que anotamos encima del 9. Tenemos: $36 + 2 = 38$. Entonces escribimos el 8 debajo del 4 y el 3 encima del 6, todo esto en la columna de las centenas:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & & 3 & 2 & \\ & & 6 & 9 & 7 \\ \times & & & 4 & 5 \\ \hline & 3 & 4 & 8 & 5 \\ & & 8 & 8 & \end{array}$$

Después multiplicamos 4×6 que nos da 24. A este resultado le sumamos el 3 que habíamos anotado encima del 6. Tenemos: $24 + 3 = 27$. Entonces escribimos el 27 a la izquierda de 88, con la cifra 7 en la columna de las unidades de mil y la cifra 2 en la columna de las decenas de mil (la cual agregamos):

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{DM} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & & & 3 & 2 & \\
 & & & 6 & 9 & 7 \\
\times & & & & 4 & 5 \\
\hline
 & & 3 & 4 & 8 & 5 \\
 & 2 & 7 & 8 & 8 &
\end{array}
$$

Como puede observarse, $4 \times 697 = 2.788$ y este número quedó localizado debajo de 3.485 pero corriéndose una casilla hacia la izquierda (debajo del 5 se deja el espacio libre, que representa un cero invisible).

Ahora borramos los números que habíamos anotado encima de 697 y trazamos la línea horizontal debajo de 2.788 para avanzar hacia el resultado final:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{DM} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & & & 6 & 9 & 7 \\
\times & & & & 4 & 5 \\
\hline
 & & 3 & 4 & 8 & 5 \\
 & 2 & 7 & 8 & 8 & \\
\hline
\end{array}
$$

Hacemos la suma vertical de los números que quedaron entre las dos líneas horizontales. En la columna de las unidades tenemos $5+0=5$, entonces escribimos 5 debajo de la línea:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{DM} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & & & 6 & 9 & 7 \\
\times & & & & 4 & 5 \\
\hline
 & & 3 & 4 & 8 & 5 \\
 & 2 & 7 & 8 & 8 & \\
\hline
 & & & & & 5
\end{array}
$$

En la columna de las decenas tenemos $8+8=16$. Entonces escribimos el 6 debajo de la línea (en la columna de las decenas) y el 1 encima del 4 (en la columna de las centenas):

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{DM} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & & & 6 & 9 & 7 \\
\times & & & & 4 & 5 \\
\hline
 & & & 1 & & \\
 & & 3 & 4 & 8 & 5 \\
 & 2 & 7 & 8 & 8 & \\
\hline
 & & & & 6 & 5
\end{array}
$$

En la columna de las centenas tenemos: $1+4+8=13$. Entonces, escribimos el 3 debajo de la línea (en la columna de las centenas) y el 1 encima del 3 (en la columna de las unidades de mil):

	DM	UM	C	D	U
			6	9	7
$\times$				4	5
		1	1		
		3	4	8	5
	2	7	8	8	
			3	6	5

En la columna de las unidades de mil tenemos: $1 + 3 + 7 = 11$. Entonces, escribimos el 1 debajo de la línea (en la columna de las unidades de mil) y el otro 1 arriba de la casilla vacía que hay encima del 2 (en la columna de las decenas de mil):

	DM	UM	C	D	U
			6	9	7
$\times$				4	5
	1	1	1		
		3	4	8	5
	2	7	8	8	
		1	3	6	5

Finalmente, en la columna de las decenas de mil, tenemos: $1+0+2 = 3$ (recordemos que en la casilla vacía hay un cero invisible). Escribimos entonces el dígito 3 debajo de la línea, en la columna de las decenas de mil:

	DM	UM	C	D	U
			6	9	7
$\times$				4	5
	1	1	1		
		3	4	8	5
	2	7	8	8	
	3	1	3	6	5

De esta manera hemos terminado la multiplicación, que puede expresarse como $697 \times 45 = 31.365$. En ella, 697 y 45 son los factores y 31.365 es el producto.

Ejemplo 8.2

Resolver 8.035×762. Ahora tenemos la multiplicación por un número de tres cifras. De nuevo se recomienda escribir la operación en forma vertical:

	UM	C	D	U
	8	0	3	5
$\times$		7	6	2

Seguimos el mismo procedimiento del ejemplo anterior, y en resumen, lo que hacemos son tres multiplicaciones: 8.035×2, 8.035×6 y 8.035×7. Sus resultados, que son 16.070, 48.210 y 56.245, respectivamente, los anotamos debajo de la línea así:

	UMI	CM	DM	UM	C	D	U
				8	0	3	5
$\times$					7	6	2
			1	6	0	7	0
		4	8	2	1	0	
	5	6	2	4	5		

Como puede observarse, el primer número obtenido (16.070) queda localizado debajo de la línea con su última cifra en la columna de las unidades; el segundo número obtenido (48.210) se corre una casilla a la izquierda en relación con el anterior (su última cifra se ubica en la columna de las decenas); y, el tercer número obtenido (56.245) se corre otra casilla a la izquierda con respecto del anterior (su última cifra queda situada en la columna de las centenas).

Lo que nos queda por resolver es la suma vertical de los números que quedaron entre las dos líneas horizontales. Obtenemos entonces lo siguiente:

	UMI	CM	DM	UM	C	D	U
				8	0	3	5
$\times$					7	6	2
			1	6	0	7	0
		4	8	2	1	0	
	5	6	2	4	5		
	6	1	2	2	6	7	0

De esta manera hemos resuelto una multiplicación de un número de cuatro cifras por otro de tres cifras. Puede expresarse como: $8.035 \times 762 = 6.122.670$ y en esa operación los factores son 8.035 y 762, mientras que 6.122.670 es el producto.

Si la multiplicación se hace por números de cuatro o más cifras, el proceso es similar al que acabamos de ver en esta clase. Solamente debemos tener presente que cada nuevo número que se obtiene debajo de la línea horizontal se corre una casilla a la izquierda, con respecto del número anterior.

También, en estas multiplicaciones con números grandes, pudimos ver lo importante que es saber de memoria las tablas de multiplicar, pues todo el tiempo estamos efectuando productos entre dígitos cuyos resultados debemos obtener de manera rápida y acertada. Desafortunadamente cualquier error que cometamos en el proceso altera el resultado final; por eso la invitación es a que seamos muy cuidadosos y organizados al momento de resolver este tipo de multiplicaciones.

Lección 9

Aplicaciones de la multiplicación

En esta clase veremos cómo se aplica la multiplicación de números naturales en dos situaciones: una es la comparación de cantidades y la otra es un problema que debe resolverse multiplicando cantidades.

Ejemplo 9.1

En cada caso vamos a escribir en el recuadro el símbolo mayor que ($>$), igual a ($=$) o menor que ($<$), según corresponda. Las operaciones deben realizarse a mano, siguiendo los procedimientos descritos anteriormente.

$$\begin{array}{c} 37 \times 4 \ \square \ 19 \times 8 \\ 539 \times 26 \ \square \ 1.001 \times 14 \\ 465 \times 789 \ \square \ 1.706 \times 213 \end{array}$$

En la primera fila tenemos:

- En la columna izquierda: $37 \times 4 = 148$.
- En la columna derecha: $19 \times 8 = 152$.

Como 148 es menor que 152 entonces escribimos el símbolo $<$ dentro del recuadro.

En la segunda fila tenemos:

- En la columna izquierda: $539 \times 26 = 14.014$.
- En la columna derecha: $1.001 \times 14 = 14.014$.

Como se trata de resultados iguales entonces escribimos el símbolo $=$ dentro del recuadro.

En la tercera fila tenemos:

- En la columna izquierda: $465 \times 789 = 366.885$.
- En la columna derecha: $1.706 \times 213 = 363.378$.

Como 366.885 es mayor que 363.378 entonces escribimos el símbolo $>$ dentro del recuadro.

En definitiva, el ejercicio resuelto queda así:

$$\begin{array}{rcl} 37 \times 4 & < & 19 \times 8 \\ 539 \times 26 & = & 1.001 \times 14 \\ 465 \times 789 & > & 1.706 \times 213 \end{array}$$

Ejemplo 9.2

El señor López compró 16 paquetes de vasos desechables para su negocio de comidas rápidas. Si cada paquete cuesta \$1.850 y trae 25 unidades, ¿Cuántos vasos adquirió? ¿Cuánto dinero gastó en esa compra?

Para resolver este problema debemos efectuar dos multiplicaciones:

· 16×25 para saber cuántos vasos adquirió el señor López (porque son 16 paquetes y cada uno trae 25 vasos); y,

· 1.850×16 para saber cuánto dinero gastó en la compra (porque son 16 paquetes y cada uno cuesta \$1.850).

Ambos procedimientos los hacemos en forma vertical y son muy parecidos al que vimos en el ejemplo 8.1 (se trata de multiplicaciones por números de dos cifras). Nos quedan así:

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\
 & & 1 & 6 \\
\times & & 2 & 5 \\
\hline
 & & 8 & 0 \\
 & 3 & 2 & \\
\hline
 & 4 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & \mathrm{DM} & \mathrm{UM} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\
 & & 1 & 8 & 5 & 0 \\
\times & & & & 1 & 6 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 8 & 5 & 0 & \\
\hline
 & 2 & 9 & 6 & 0 & 0
\end{array}$$

De esta manera concluimos que $16 \times 25 = 400$ y que $1.850 \times 16 = 29.600$.

Por lo tanto, el señor López adquirió 400 vasos desechables y en ellos gastó \$29.600.

Lección 10

Propiedades de la multiplicación

La multiplicación de números naturales cuenta con unas propiedades o "reglas de juego" que debemos conocer y distinguir muy bien. Son ellas:

- La propiedad Clausurativa.
- La propiedad Conmutativa.
- La propiedad Asociativa.
- La propiedad Modulativa.
- La propiedad Anulativa.
- La propiedad Distributiva.

A continuación veremos cada una detalladamente.

Propiedad Clausurativa

Dice: "La multiplicación de dos números naturales siempre da como resultado un número natural".

A esta propiedad también se le conoce como **Propiedad de la Cerradura** y lo que significa es que la multiplicación de dos números naturales es una operación cerrada en ese conjunto numérico, pues siempre vamos a obtener como resultado otro número natural.

Ejemplo 10.1

En la operación $38 \times 7 = 266$, los factores (38 y 7) son números naturales y el producto (266) también es un número natural.

Ejemplo 10.2

En la operación $2.103 \times 965 = 2.029.395$, los factores (2.103 y 965) son números naturales y el producto (2.029.395) también es un número natural.

Propiedad Conmutativa

Dice: "El orden de los factores no altera el producto".

Esta propiedad nos permite realizar una multiplicación de dos o más números naturales en cualquier orden, con la tranquilidad de que el resultado siempre será el mismo.

Ejemplo 10.3

Si efectuamos 8×3 obtenemos 24, y si cambiamos el orden de los factores, es decir 3×8, también nos da 24. Entonces: $8 \times 3 = 3 \times 8 = 24$.

Ejemplo 10.4

Si efectuamos 86×53 obtenemos 4.558. Al resolver la multiplicación en el otro orden, es decir 53×86, el resultado también es 4.558. Esto confirma que se cumple la propiedad conmutativa de la multiplicación: $86 \times 53 = 53 \times 86 = 4.558$.

Propiedad Asociativa

Dice: "El resultado de multiplicar tres o más números es el mismo, sin importar la manera como se asocien o agrupen".

Esta propiedad nos permite formar grupos o asociaciones de números cuando tenemos que multiplicar tres o más cantidades. Para ello utilizamos PARÉNTESIS ( ), CORCHETES [ ] o LLAVES { }, que son los signos de agrupación adecuados para este propósito. Por lo general, se acostumbra usar PARÉNTESIS ( ) para asociar números naturales en la multiplicación.

Ejemplo 10.5

Si nos piden resolver $3 \times 5 \times 4$ podemos aplicar la propiedad asociativa, de dos formas:

- En la primera, agrupamos los dos primeros factores: $(3 \times 5) \times 4$. Allí comenzamos por resolver lo que hay dentro del paréntesis, es decir 3×5 que nos da 15, e inmediatamente eliminamos estos signos de agrupación. Entonces, la operación se convierte en 15×4 y ésta nos da como resultado 60.

  Simbólicamente, la secuencia anterior queda expresada así:

  $$3 \times 5 \times 4 = (3 \times 5) \times 4 = 15 \times 4 = 60$$

- En la segunda forma, vamos a asociar los dos últimos factores: $3 \times (5 \times 4)$. Nuevamente le damos prioridad a la operación encerrada por los paréntesis, es decir 5×4 que nos da 20. Luego, la operación queda reducida a 3×20, y el resultado es 60.

  La secuencia anterior, expresada en términos simbólicos, queda así:

  $$3 \times 5 \times 4 = 3 \times (5 \times 4) = 3 \times 20 = 60$$

  Concluimos entonces que:

  $$(3 \times 5) \times 4 = 3 \times (5 \times 4)$$

Ejemplo 10.6

Si nos piden resolver $12 \times 17 \times 31 \times 25$ podemos aplicar la propiedad asociativa, de dos formas distintas:

- En la primera, agrupamos los dos primeros y los dos últimos factores: $(12\times 17)\times(31\times 25)$. Ahora resolvemos esas operaciones que encerramos con paréntesis: 12×17 que nos da 204, y 31×25 que nos da 775. Entonces, la operación se transforma en 204×775 y esto nos da como resultado 158.100.

  Simbólicamente, la secuencia anterior queda expresada así:

$$12\times 17\times 31\times 25=(12\times 17)\times(31\times 25)=204\times 775=158.100$$

- En la segunda forma, agrupamos el segundo y el tercer factor: $12\times(17\times 31)\times 25$. Resolviendo la operación encerrada por los paréntesis, es decir 17×31 que nos da como resultado 527, tenemos: $12\times 527\times 25$. Como se observa, hemos reducido la cantidad de factores de cuatro a tres, y enseguida tenemos dos alternativas, tal como se vió en el ejemplo 10.5:

$$12\times 527\times 25=(12\times 527)\times 25=6.324\times 25=158.100$$

$$12\times 527\times 25=12\times(527\times 25)=12\times 13.175=158.100$$

  De nuevo notamos que, sin importar cómo hagamos la asociación de los números, el resultado es el mismo.

  Simbólicamente, la secuencia anterior queda expresada en las siguientes dos maneras:

$$12\times 17\times 31\times 25=12\times(17\times 31)\times 25=12\times 527\times 25=(12\times 527)\times 25=6.324\times 25=158.100$$

$$12\times 17\times 31\times 25=12\times(17\times 31)\times 25=12\times 527\times 25=12\times(527\times 25)=12\times 13.175=158.100$$

Propiedad Modulativa

Dice: "Al multiplicar cualquier número natural por UNO se obtiene el mismo número natural".

Esta propiedad también se conoce con el nombre de **Propiedad del Elemento Neutro** pues se considera el UNO como el módulo o elemento neutro de la operación multiplicación. Cuando el UNO participa como factor, no modifica el producto.

Ejemplo 10.7

$8\times 1=8$.

$1\times 256=256$.

Propiedad Anulativa

Dice: "Al multiplicar cualquier número natural por CERO se obtiene CERO".

En otras palabras, si el CERO está presente como factor en una multiplicación (sin importar cuántos factores hayan), simplemente el resultado de esa operación (es decir, el producto) será CERO.

Ejemplo 10.8

$0 \times 13 = 0$.

$178 \times 0 = 0$.

$45 \times 0 \times 62 = 0$.

$18 \times 94 \times 87 \times 0 = 0$.

Propiedad Distributiva

Dice: "La multiplicación de un número por una suma o resta de cantidades equivale a la suma o resta del producto de dicho número por cada una de esas cantidades".

Lo anterior, expresado en forma simbólica queda así:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$
$$a \times (b + c - d) = a \times b + a \times c - a \times d$$
$$a \times (b - c + d - e) = a \times b - a \times c + a \times d - a \times e$$

donde a, b, c, d y e representan números naturales.

Como puede observarse, en la propiedad distributiva se combinan mínimo dos y máximo tres operaciones: multiplicación por fuera del paréntesis y suma y/o resta dentro de él. Cuando aplicamos esta propiedad, se rompe dicho paréntesis y el número natural que está por fuera se distribuye (o se reparte) para todas y cada una de las cantidades que están sumando o restando dentro del paréntesis. Ese número externo multiplica entonces a esas cantidades internas, conservándose los signos que hay entre ellas.

A continuación vamos a ver tres ejemplos donde se aplica la propiedad distributiva, mostrando la validez de la misma. Cabe anotar que en el lado derecho de la igualdad, primero se resuelven las multiplicaciones y luego las sumas o restas; esto es algo muy importante que debemos tener presente, ya que la multiplicación es una operación de mayor jerarquía que la suma y la resta. Entonces, siempre que tengamos combinación de suma, resta y multiplicación, sin signos de agrupación, primero resolvemos las multiplicaciones y después las sumas o restas.

Ejemplo 10.9

$$4 \times (5 + 8) = 4 \times 5 + 4 \times 8$$
$$4 \times 13 = 20 + 32$$
$$52 = 52$$

Ejemplo 10.10

$$\begin{aligned} 19 \times (23 - 11) &= 19 \times 23 - 19 \times 11 \\ 19 \times 12 &= 437 - 209 \\ 228 &= 228 \end{aligned}$$

Ejemplo 10.11

$$\begin{aligned} 25 \times (8 + 5 - 3) &= 25 \times 8 + 25 \times 5 - 25 \times 3 \\ 25 \times (13 - 3) &= 200 + 125 - 75 \\ 25 \times 10 &= 325 - 75 \\ 250 &= 250 \end{aligned}$$

Lección 11

La división por una cifra

La División se representa con el signo ($\div$) que quiere decir "dividido por" o "dividido entre". También se simboliza con una diagonal o barra inclinada (/), y es la operación que nos permite repartir una cantidad en varias partes iguales. De igual forma, con la división podemos saber cuántas veces cabe un número natural en otro que es igual o más grande (por ejemplo, con la operación $8 \div 2$ podemos saber cuántas veces cabe 2 en 8).

Si tenemos la división $a \div b = c$ (que también puede escribirse $a/b = c$), donde a, b y c representan números naturales, siendo b distinto de cero, entonces se lee: "a" dividido por "b" es igual a "c" o también "a" dividido entre "b" es igual a "c".

La expresión $a \div b = c$ quiere decir que si repartimos la cantidad "a" en "b" partes iguales, entonces cada una de ellas tiene tamaño "c".

$a \div b = c$ también significa que "b" está contenida exactamente "c" veces en "a", o sea que $c \times b = a$, o también $b \times c = a$ (de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación). Por esta razón se afirma que la división es la operación contraria o inversa a la multiplicación.

Por lo general, es necesario que "a" sea mayor o igual que "b" para que la división tenga sentido en el conjunto de los números naturales. Sin embargo, hay un caso excepcional: $0 \div b = 0$. Aquí se observa que "b", siendo distinto de cero, siempre va a ser un número natural mayor que cero. En palabras, decimos que al dividir cero entre cualquier número natural (distinto de cero) siempre vamos a obtener cero como resultado.

En la situación $a \div b = c$ tenemos que "a" es el DIVIDENDO, "b" es el DIVISOR y "c" es el COCIENTE. Como "b" cabe exactamente "c" veces en "a", no sobra ninguna cantidad, es decir que no hay RESIDUO (o también decimos que el residuo es cero). En este caso, tenemos una DIVISIÓN EXACTA y se distingue porque el valor del residuo es cero.

Entonces, en una División Exacta tenemos que:

$$\text{Dividiendo} \div \text{Divisor} = \text{Cociente}$$

... y por lo tanto:

$$\text{Cociente} \times \text{Divisor} = \text{Dividiendo}$$

... que es lo que constituye la prueba o verificación de la División Exacta.

Cuando en la división $a \div b$ encontramos que "b" no cabe exactamente en "a", entonces allí hay un residuo distinto de cero, y en ese caso tenemos una DIVISIÓN INEXACTA.

Luego, la División Inexacta se caracteriza porque el residuo es un número diferente de cero, y sus componentes se organizan así:

$$\begin{array}{c|c} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \vdots & \text{Cociente} \\ \text{Residuo} & \end{array}$$

En toda División Inexacta debe cumplirse que:

$$\textit{Cociente} \times \textit{Divisor} + \textit{Residuo} = \textit{Dividendo}$$

... y esto es lo que se conoce como la PRUEBA DE LA DIVISIÓN (recordemos que primero se resuelve la multiplicación y luego la suma).

A continuación veremos ejemplos de algunas divisiones y sus respectivas pruebas.

Ejemplo 11.1

Al efectuar "seis dividido por dos" obtenemos como resultado tres (porque, en seis, dos cabe exactamente tres veces). Simbólicamente: $6 \div 2 = 3$. En esta operación tenemos que 6 es el dividendo, 2 es el divisor y 3 es el cociente. Como no hay residuo (o éste vale cero) entonces decimos que la división es exacta.

Comprobamos la validez de esta operación revisando si se cumple la igualdad: Cociente $\times$ Divisor $=$ Dividendo. En este caso, es cierto que $3 \times 2 = 6$ y concluimos que la división está correctamente resuelta.

Ejemplo 11.2

"Ocho dividido por cuatro" nos da como resultado dos (porque cuatro cabe en ocho exactamente dos veces). Simbólicamente: $8 \div 4 = 2$. En este caso el dividendo es 8, el divisor es 4 y el cociente es 2. De nuevo observamos que no hay residuo, y por eso afirmamos que esta división es exacta.

Hacemos la prueba de la división verificando si se cumple la igualdad: Cociente $\times$ Divisor $=$ Dividendo. Efectivamente $2 \times 4 = 8$ y así tenemos la tranquilidad de haber efectuado la división correctamente.

Ejemplo 11.3

Al intentar resolver "nueve dividido por dos" (simbólicamente $9 \div 2$) vemos que no es posible obtener como resultado un número natural, porque 2 no cabe en 9 una cantidad exacta de veces.

Entonces, para efectuar la operación organizamos sus componentes de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|c} 9 & 2 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Inicialmente nos preguntamos si 2 cabe en 9. Como la respuesta es afirmativa (porque 2 es menor que 9) entonces colocamos una marca arriba y a la derecha del 9 para indicar que tomamos sólo esa cifra:

$$\begin{array}{r|l} 9' & 2 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Ahora debemos determinar cuántas veces 2 es el resultado más próximo o igual a 9. Para ello podemos complementar el ejercicio con la tabla de multiplicar del 2:

$2 \times 0 = 0$
$2 \times 1 = 2$
$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$
$2 \times 4 = 8$
$2 \times 5 = 10$
$2 \times 6 = 12$
$2 \times 7 = 14$
$2 \times 8 = 16$
$2 \times 9 = 18$

Revisando los resultados anteriores, encontramos que el número que más se acerca por debajo a 9 es 8 (correspondiente a 2×4), y por eso decimos que 2 en 9 cabe 4 veces. Entonces escribimos el 4 en el lugar que corresponde al cociente:

$$\begin{array}{r|l} 9' & 2 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

Ahora multiplicamos 4×2 (lo mismo que 2×4, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado, que es 8, lo escribimos debajo del 9:

$$\begin{array}{r|l} 9' & 2 \\ \cline{2-2} 8 & 4 \end{array}$$

Enseguida, efectuamos la resta $9 - 8$ en forma vertical:

$$\begin{array}{lr|l} & 9' & 2 \\ \cline{3-3} - & 8 & 4 \\ \cline{1-2} & 1 & \end{array}$$

Debido a que en el dividendo no hay más cifras para continuar con la división, entonces damos por terminada la operación.

Vemos que, en la división anterior, 9 es el dividendo, 2 es el divisor, 4 es el cociente y 1 es el residuo. Como el residuo es un número diferente de cero, entonces afirmamos que se trata de una división inexacta.

Hacemos la prueba de la división, verificando si se cumple la igualdad:

$$Cociente \times Divisor + Residuo = Dividendo$$

Veamos:

$$4 \times 2 + 1 = 9$$

$$8 + 1 = 9$$

$$9 = 9$$

Como efectivamente la igualdad se cumple, entonces concluimos que la división se ha realizado en forma correcta.

Ejemplo 11.4

Resolver $218 \div 6$. Comenzamos por acomodar los números de la siguiente forma:

$$218 \,\underline{|\ 6\ }$$

En principio consideramos la primera cifra del dividendo (es decir 2) y nos preguntamos ¿6 cabe en 2?

Como esto no es posible (porque 6 es mayor que 2) entonces procedemos a intentar tomando las dos primeras cifras del dividendo (es decir 21). Otra vez nos hacemos la pregunta ¿6 cabe en 21?

Ya que la respuesta es afirmativa (porque 6 es menor que 21) entonces colocamos una marca arriba y a la derecha del 21 indicando así que hemos tomado las dos primeras cifras del dividendo para comenzar a desarrollar la división:

$$21'8 \,\underline{|\ 6\ }$$

Ahora debemos establecer cuántas veces 6 es el resultado más cercano o igual a 21. Para ello complementamos el ejercicio con la tabla de multiplicar del 6:

$6 \times 0 = 0$
$6 \times 1 = 6$
$6 \times 2 = 12$
$6 \times 3 = 18$
$6 \times 4 = 24$
$6 \times 5 = 30$
$6 \times 6 = 36$
$6 \times 7 = 42$
$6 \times 8 = 48$
$6 \times 9 = 54$

Revisando los resultados anteriores, encontramos que el número que más se acerca por debajo a 21 es 18 (correspondiente a 6×3), y por eso decimos que 6 en 21 cabe 3 veces. Entonces escribimos el 3 en el lugar que corresponde al cociente:

$$\begin{array}{r|l} 21'8 & 6 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}$$

Ahora multiplicamos 3×6 (lo mismo que 6×3, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado, que es 18, lo escribimos debajo del 21:

$$\begin{array}{l|l} 21'8 & 6 \\ \cline{2-2} 18 & 3 \end{array}$$

Enseguida, efectuamos la resta $21 - 18$ en forma vertical:

$$\begin{array}{rl|l} & 21'8 & 6 \\ \cline{3-3} - & 18 & 3 \\ \cline{1-2} & 03 & \end{array}$$

Debido a que en el dividendo hay otra cifra que no ha participado todavía en la división (es decir 8), entonces quiere decir que debemos continuar con el desarrollo de la operación. Procedemos entonces a bajar esa cifra hasta situarla a la derecha de la diferencia que acabamos de obtener (o sea a la derecha del 3). Se forma así el número 38:

$$\begin{array}{rl|l} & 21'8 & 6 \\ \cline{3-3} - & 18\downarrow & 3 \\ \cline{1-2} & 038 & \end{array}$$

De nuevo nos preguntamos ¿6 cabe en 38?

Como la respuesta es afirmativa (porque 6 es menor que 38) entonces debemos determinar cuántas veces 6 es el resultado más cercano o igual a 38. Revisamos la tabla de multiplicar del 6 que acompaña este ejercicio y encontramos que el resultado que más se acerca por debajo a 38 es 36 (correspondiente a 6×6), y por eso decimos que 6 en 38 cabe 6 veces. Entonces escribimos el 6 en el lugar que corresponde al cociente, a la derecha del 3:

$$\begin{array}{rl|l} & 21'8 & 6 \\ \cline{3-3} - & 18 & 36 \\ \cline{1-2} & 038 & \end{array}$$

Multiplicamos 6×6 y el resultado, que es 36, lo escribimos debajo de 38:

$$\begin{array}{rl|l} & 21'8 & 6 \\ \cline{3-3} - & 18 & 36 \\ \cline{1-2} & 038 & \\ & \ \ 36 & \end{array}$$

Ahora, resolvemos la resta $38 - 36$ en forma vertical:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 21'8 & 6 \\ \cline{3-3}
- & 18 & 36 \\ \cline{1-2}
 & 038 & \\
- & 36 & \\ \cline{1-2}
 & 02 &
\end{array}
$$

Como en el dividendo ya usamos todas las cifras (no hay más para bajar y continuar con el proceso), entonces damos por terminada la operación.

Observamos que en la división anterior 218 es el dividendo, 6 es el divisor, 36 es el cociente y 2 es el residuo. Decimos entonces que la división es inexacta porque su residuo es diferente de cero.

Probamos la validez de la operación realizada, verificando la igualdad:

$$Cociente \times Divisor + Residuo = Dividendo$$

Veamos:

$$36 \times 6 + 2 = 218$$

$$216 + 2 = 218$$

$$218 = 218$$

Como la igualdad se cumple, entonces concluimos que la división que hemos efectuado es correcta.

Lección 12

La división por dos cifras

En esta clase veremos cómo se efectúa la división por un número de dos cifras.

Ejemplo 12.1

Resolver $14.399 \div 17$. Comenzamos por acomodar los números de la siguiente forma:

$$14399 \;\underline{|\; 17\;}$$

Como puede notarse, en el dividendo hemos quitado el punto que indica la posición de miles, ya que no lo necesitamos para resolver la división. Comenzamos tomando la primera cifra del dividendo (es decir 1) y nos preguntamos ¿17 cabe en 1?

Como esto no es posible (porque 17 es mayor que 1) entonces probamos considerando las dos primeras cifras del dividendo (es decir 14). Otra vez nos hacemos la pregunta ¿17 cabe en 14?

Vemos que tampoco es posible (porque 17 es mayor que 14). Intentamos ahora tomando las tres primeras cifras del dividendo (es decir 143) y volvemos a preguntarnos ¿17 cabe en 143?

Ya que la respuesta es afirmativa (porque 17 es menor que 143), entonces colocamos una marca arriba y a la derecha del 143 indicando así que hemos tomado las tres primeras cifras del dividendo para comenzar a desarrollar la división:

$$143'99 \;\underline{|\; 17\;}$$

Ahora debemos determinar cuántas veces 17 es el resultado más próximo o igual a 143. Para ello complementamos el ejercicio con la tabla de multiplicar del 17:

$17 \times 0 = 0$
$17 \times 1 = 17$
$17 \times 2 = 34$
$17 \times 3 = 51$
$17 \times 4 = 68$
$17 \times 5 = 85$
$17 \times 6 = 102$
$17 \times 7 = 119$
$17 \times 8 = 136$
$17 \times 9 = 153$

Revisando los resultados anteriores, encontramos que el número que más se acerca por debajo a 143 es 136 (correspondiente a 17×8), y por eso decimos que 17 en 143 cabe 8 veces. Entonces escribimos el 8 en el lugar que corresponde al cociente:

$$\begin{array}{r|l} 143'99 & 17 \\ \cline{2-2} & \ 8 \end{array}$$

Enseguida multiplicamos 8×17 (lo mismo que 17×8, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado, que es 136, lo escribimos debajo de 143:

$$\begin{array}{l|l} 143'99 & 17 \\ \cline{2-2} 136 & \ 8 \end{array}$$

Luego efectuamos la resta $143 - 136$ en forma vertical:

$$\begin{array}{rl|l} & 143'99 & 17 \\ \cline{3-3} - & 136 & \ 8 \\ \cline{1-2} & 007 & \end{array}$$

Ahora bajamos la siguiente cifra del dividendo (es decir el 9 que está a la derecha del 3), hasta ubicarla junto a la diferencia que acabamos de obtener (o sea a la derecha de 7). Tenemos así el número 79 con el que vamos a continuar con el proceso:

$$\begin{array}{rl|l} & 143'99 & 17 \\ \cline{3-3} - & 136 \downarrow & \ 8 \\ \cline{1-2} & 007\ 9 & \end{array}$$

Nos preguntamos ¿17 cabe en 79?

Como la respuesta es afirmativa (porque 17 es menor que 79) entonces revisamos los resultados de la tabla de multiplicar del 17 para ver cuál es el número que más se aproxima por debajo o es igual a 79. Encontramos que es 68 (correspondiente a 17×4) y por eso decimos que 17 cabe 4 veces en 79. Escribimos entonces el número 4 en el cociente, a la derecha del 8:

$$\begin{array}{rl|l} & 143'99 & 17 \\ \cline{3-3} - & 136 & 84 \\ \cline{1-2} & 007\ 9 & \end{array}$$

Multiplicamos 4×17 (que es lo mismo que 17×4, según la propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado, que es 68, lo escribimos debajo de 79:

$$\begin{array}{rl|l} & 143'99 & 17 \\ \cline{3-3} - & 136 & 84 \\ \cline{1-2} & 007\ 9 & \\ & \quad 6\ 8 & \end{array}$$

Ahora resolvemos la resta $79 - 68$ en forma vertical:

$$\begin{array}{rl|l} & 143'99 & 17 \\ \cline{3-3} - & 136 & 84 \\ \cline{1-2} & 007\ 9 & \\ & -\ 6\ 8 & \\ \cline{1-2} & \quad 1\ 1 & \end{array}$$

Bajamos la última cifra del dividendo (es decir el 9 que está a la derecha de 9), hasta localizarla junto a la diferencia que acabamos de obtener (o sea a la derecha de 11). Se forma así el número 119 y con él vamos a continuar el proceso:

$$\begin{array}{rl|l} & 143'99 & 17 \\ \cline{3-3} - & 136 \ \downarrow & 84 \\ \cline{1-2} & 007\ 9 \downarrow & \\ & -\ 6\ 8 \downarrow & \\ \cline{1-2} & \quad 1\ 1\ 9 & \end{array}$$

Nos preguntamos ¿17 cabe en 119?

Como la respuesta es sí (porque 17 es menor que 119) entonces revisamos en la tabla de multiplicar del 17 cuál es el resultado más próximo por debajo o igual a 119. Encontramos que justamente aparece 119 (correspondiente a la operación 17×7) y por eso decimos que 17 cabe 7 veces en 119. Entonces escribimos 7 en el cociente, a la derecha de 84:

$$\begin{array}{rl|l} & 143'99 & 17 \\ \cline{3-3} - & 136 \ \downarrow & 847 \\ \cline{1-2} & 007\ 9 \downarrow & \\ & -\ 6\ 8 \downarrow & \\ \cline{1-2} & \quad 1\ 1\ 9 & \end{array}$$

Hacemos el producto 7×17 (que es lo mismo que 17×7, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación) y el resultado, que es 119, lo escribimos debajo de 119:

$$
\begin{array}{r|l}
143'99 & 17 \\ \cline{2-2}
-\quad 136 \;\;\downarrow & 847 \\ \hline
007\;9\downarrow & \\
-\;\;6\;8\downarrow & \\ \hline
1\;1\;9\;\; & \\
1\;1\;9\;\; &
\end{array}
$$

Realizamos la resta $119 - 119$ en forma vertical:

$$
\begin{array}{r|l}
143'99 & 17 \\ \cline{2-2}
-\quad 136 \;\;\downarrow & 847 \\ \hline
007\;9\downarrow & \\
-\;\;6\;8\downarrow & \\ \hline
1\;1\;9\;\; & \\
-\;\;1\;1\;9\;\; & \\ \hline
0\;0\;0\;\; &
\end{array}
$$

Como no tenemos más cifras para bajar en el dividendo entonces damos por terminada la división.

En esta operación tenemos que el dividendo es 14.399, el divisor es 17, el cociente es 847 y el residuo es 0. Con base en este último dato concluimos que la división es exacta, y podemos probarla verificando la igualdad:

$$Cociente \times Divisor = Dividendo$$

Veamos:

$$847 \times 17 = 14.399$$

$$14.399 = 14.399$$

Como efectivamente la igualdad se cumple, entonces tenemos la tranquilidad de haber resuelto correctamente la división.

Lección 13

La división por tres cifras

En esta oportunidad veremos cómo se efectúa la división por un número de tres cifras.

Ejemplo 13.1

Resolver $232.100 \div 329$. Comenzamos por acomodar los números de la siguiente forma:

$$232100 \,\big\lfloor\, \underline{329}$$

Tal como en el ejemplo 12.1, en el dividendo hemos quitado el punto que indica la posición de miles, ya que no es necesario para resolver la operación.

Iniciamos tomando la primera cifra del dividendo (es decir 2) y nos preguntamos ¿329 cabe en 2?

Como esto no es posible (porque 329 es mayor que 2) entonces pasamos a considerar las dos primeras cifras del dividendo (es decir 23). Otra vez nos hacemos la pregunta ¿329 cabe en 23?

Debido a que tampoco es posible (porque 329 es mayor que 23), intentamos ahora tomando las tres primeras cifras del dividendo (es decir 232) y volvemos a preguntarnos ¿329 cabe en 232?

Como la respuesta vuelve a ser no (porque 329 es mayor que 232) entonces consideramos las cuatro primeras cifras del dividendo (es decir 2321), y nos preguntamos ¿329 cabe en 2.321?

Ya que la respuesta es afirmativa (porque 329 es menor que 2.321) entonces colocamos una marca arriba y a la derecha de 2321 indicando así que vamos a tomar las cuatro primeras cifras del dividendo para comenzar a desarrollar la división:

$$2321'00 \,\big\lfloor\, \underline{329}$$

A continuación debemos determinar cuántas veces 329 es el resultado más cercano por debajo o igual a 2.321. Para ello complementamos el ejercicio con la tabla de multiplicar del 329:

$329 \times 0 = 0$
$329 \times 1 = 329$
$329 \times 2 = 658$
$329 \times 3 = 987$
$329 \times 4 = 1.316$
$329 \times 5 = 1.645$
$329 \times 6 = 1.974$
$329 \times 7 = 2.303$
$329 \times 8 = 2.632$
$329 \times 9 = 2.961$

Revisando los resultados anteriores, encontramos que el número que más se acerca por debajo a 2.321 es 2.303 (correspondiente a 329×7), y por eso decimos que 329 cabe 7 veces en 2.321. Entonces escribimos el 7 en el lugar que corresponde al cociente:

$$\begin{array}{r|l} 2321'00 & 329 \\ \cline{2-2} & \ \ 7 \end{array}$$

Ahora multiplicamos 7×329 (lo mismo que 329×7, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado, que es 2303, lo escribimos debajo de 2321:

$$\begin{array}{l|l} 2321'00 & 329 \\ \cline{2-2} 2303 & \ \ 7 \end{array}$$

Realizamos la resta $2321 - 2303$ en forma vertical:

$$\begin{array}{rl|l} & 2321'00 & 329 \\ \cline{3-3} - & 2303 & \ \ 7 \\ \cline{1-2} & 0018 & \end{array}$$

Bajamos la siguiente cifra del dividendo (es decir el 0 que está a la derecha del 1), hasta ubicarla junto a la diferencia que acabamos de obtener (o sea a la derecha de 18). Tenemos así el número 180 con el que vamos a continuar el proceso:

$$\begin{array}{rl|l} & 2321'00 & 329 \\ \cline{3-3} - & 2303 \downarrow & \ \ 7 \\ \cline{1-2} & 0018\ 0 & \end{array}$$

Nos preguntamos ahora ¿329 cabe en 180?

Como la respuesta es no (porque 329 es mayor que 180), entonces escribimos cero en el cociente, a la derecha de 7:

$$\begin{array}{rl|l} & 2321'00 & 329 \\ \cline{3-3} - & 2303 \downarrow & \ 70 \\ \cline{1-2} & 0018\ 0 & \end{array}$$

Procedemos a bajar la siguiente cifra del dividendo (es decir el último 0) hasta localizarla junto a la cantidad que formamos recientemente (o sea 180). Tenemos así el número 1800 con el que continuamos la división:

$$\begin{array}{rr|l} & 2321'00 & 329 \\ \cline{3-3} - & 2303\ \downarrow & 70 \\ \hline & 0018\ 00 & \end{array}$$

Nos preguntamos ¿329 cabe en 1800?

Como la respuesta es sí, vamos a la tabla de multiplicar de 329 y buscamos el resultado que más se acerque por debajo o que sea igual a 1.800. Se trata de 1.645 (que corresponde a 329×5), y por eso decimos que 329 cabe 5 veces en 1800. Entonces escribimos 5 en el cociente, a la derecha de 70:

$$\begin{array}{rr|l} & 2321'00 & 329 \\ \cline{3-3} - & 2303 & 705 \\ \hline & 0018\ 00 & \end{array}$$

Multiplicamos 5×329 (lo mismo que 329×5 según la propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado, que es 1645, lo escribimos debajo de 1800:

$$\begin{array}{rr|l} & 2321'00 & 329 \\ \cline{3-3} - & 2303 & 705 \\ \hline & 0018\ 00 & \\ & 16\ 45 & \end{array}$$

Realizamos la resta $1800 - 1645$ en forma vertical:

$$\begin{array}{rr|l} & 2321'00 & 329 \\ \cline{3-3} - & 2303 & 705 \\ \hline & 0018\ 00 & \\ & -\ \ 16\ 45 & \\ \hline & 01\ 55 & \end{array}$$

Debido a que no hay más cifras para bajar en el dividendo entonces damos por terminado el proceso.

En esta división tenemos que el dividendo es 232.100, el divisor es 329, el cociente es 705 y el residuo es 155. Decimos que la división es inexacta (porque su residuo es diferente de cero) y podemos probarla verificando la igualdad:

$$\textit{Cociente} \times \textit{Divisor} + \textit{Residuo} = \textit{Dividendo}$$

Veamos:

$$705 \times 329 + 155 = 232.100$$

$$231.945 + 155 = 232.100$$

$$232.100 = 232.100$$

Como la igualdad se cumple, entonces tenemos la tranquilidad de haber resuelto la división de la manera correcta.

En esta clase y las dos anteriores hemos visto que en la división (bien sea por una, por dos o por tres cifras) utilizamos las otras tres operaciones básicas:

· Multiplicación y resta, cuando realizamos el procedimiento que nos conduce a encontrar el cociente y el residuo;

· Multiplicación y suma, cuando hacemos la prueba de la división para verificar que nos haya quedado bien resuelta.

Por esa razón, debemos manejar muy bien la suma, la resta y la multiplicación, ya que son las herramientas para resolver divisiones con éxito.

Lección 14

Aplicaciones de la división

En esta clase veremos la aplicación de la división de números naturales en dos situaciones: la primera es un ejercicio de comparación de cantidades y la segunda es un problema que se resuelve mediante una división.

Ejemplo 14.1

En cada caso vamos a escribir en el recuadro el símbolo mayor que (>), igual a (=) o menor que (<), según corresponda. Todas las divisiones son exactas y deben realizarse a mano, siguiendo los procedimientos descritos anteriormente.

$$581 \div 7 \ \square\ 415 \div 5$$
$$15.496 \div 26 \ \square\ 22.496 \div 38$$
$$127.712 \div 416 \ \square\ 151.690 \div 394$$

En la primera fila tenemos divisiones por una cifra:

- En la columna izquierda: $581 \div 7 = 83$.
- En la columna derecha: $415 \div 5 = 83$.

Como obtenemos el mismo resultado, entonces escribimos el símbolo = dentro del recuadro.

En la segunda fila tenemos divisiones por dos cifras:

- En la columna izquierda: $15.496 \div 26 = 596$.
- En la columna derecha: $22.496 \div 38 = 592$.

Como 596 es mayor que 592 entonces escribimos el símbolo > dentro del recuadro.

En la tercera fila tenemos:

- En la columna izquierda: $127.712 \div 416 = 307$.
- En la columna derecha: $151.690 \div 394 = 385$.

Como 307 es menor que 385 entonces escribimos el símbolo < dentro del recuadro.

En definitiva, el ejercicio resuelto queda así:

$$\begin{aligned} 581 \div 7 &= 415 \div 5 \\ 15.496 \div 26 &> 22.496 \div 38 \\ 127.712 \div 416 &< 151.690 \div 394 \end{aligned}$$

Ejemplo 14.2

La maestra Jaramillo es directora de un grupo conformado por 28 niños y tiene 450 bombones para repartir entre ellos. ¿Cuántos bombones le corresponde a cada estudiante? ¿Le sobran bombones a la maestra?

En este caso, y en todas las situaciones en que tengamos que repartir o distribuir una cantidad en partes iguales, debemos efectuar una división.

Entonces vamos a resolver $450 \div 28$, es decir una división por dos cifras, para determinar cuántos bombones le corresponde a cada estudiante. Comenzamos por acomodar los números de la siguiente forma:

$$450 \; \underline{\big|\; 28 \;}$$

Tomamos la primera cifra del dividendo (es decir 4) y nos hacemos la pregunta ¿28 cabe en 4?

Como esto no es posible (porque 28 es mayor que 4) entonces consideramos las dos primeras cifras del dividendo (es decir 45). Otra vez nos preguntamos ¿28 cabe en 45?

Ya que la respuesta es afirmativa (porque 28 es menor que 45), entonces colocamos una marca arriba y a la derecha del 45 indicando así que hemos tomado las dos primeras cifras del dividendo, para iniciar el desarrollo de la división:

$$45'0 \; \underline{\big|\; 28 \;}$$

Enseguida debemos determinar cuántas veces 28 es el resultado más próximo por debajo o igual a 45. Para ello complementamos el ejercicio con la tabla de multiplicar del 28:

$28 \times 0 = 0$
$28 \times 1 = 28$
$28 \times 2 = 56$
$28 \times 3 = 84$
$28 \times 4 = 112$
$28 \times 5 = 140$
$28 \times 6 = 168$
$28 \times 7 = 196$
$28 \times 8 = 224$
$28 \times 9 = 252$

Revisando los resultados anteriores, encontramos que el número que más se acerca por debajo a 45 es 28 (correspondiente a 28×1), y por eso decimos que 28 en 45 cabe 1 vez. Entonces escribimos el número 1 en el lugar que corresponde al cociente:

$$\begin{array}{r|l} 45'0 & 28 \\ \cline{2-2} & \;1 \end{array}$$

Ahora multiplicamos 1×28 (lo mismo que 28×1, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado, que es 28, lo escribimos debajo de 45:

$$\begin{array}{l|l} 45'0 & 28 \\ \cline{2-2} 28 & 1 \end{array}$$

Luego efectuamos la resta $45 - 28$ en forma vertical:

$$\begin{array}{rr|l} & 45'0 & 28 \\ \cline{3-3} - & 28 & 1 \\ \cline{1-2} & 17 & \end{array}$$

Después bajamos la siguiente cifra del dividendo (es decir el 0 que está a la derecha de 45), hasta ubicarla junto a la diferencia que acabamos de obtener (o sea a la derecha de 17). Tenemos así el número 170 con el que vamos a continuar la división:

$$\begin{array}{rr|l} & 45'0 & 28 \\ \cline{3-3} - & 28 \downarrow & 1 \\ \cline{1-2} & 17\ 0 & \end{array}$$

Nos preguntamos ¿28 cabe en 170?

Como la respuesta es afirmativa (porque 28 es menor que 170) entonces revisamos los resultados de la tabla de multiplicar del 28 para ver cuál es el número que más se aproxima por debajo o es igual a 170. Encontramos que es 168 (correspondiente a 28×6) y por eso decimos que 28 cabe 6 veces en 170. Escribimos entonces el número 6 en el cociente, a la derecha del 1:

$$\begin{array}{rr|l} & 45'0 & 28 \\ \cline{3-3} - & 28 \downarrow & 16 \\ \cline{1-2} & 17\ 0 & \end{array}$$

Multiplicamos 6×28 (lo mismo que 28×6, según la propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado, que es 168, lo escribimos debajo de 170:

$$\begin{array}{rr|l} & 45'0 & 28 \\ \cline{3-3} - & 28 & 16 \\ \cline{1-2} & 17\ 0 & \\ & 16\ 8 & \end{array}$$

Ahora resolvemos la resta $170 - 168$ en forma vertical:

$$\begin{array}{rr|l} & 45'0 & 28 \\ \cline{3-3} - & 28 & 16 \\ \cline{1-2} & 17\ 0 & \\ & 16\ 8 & \\ \cline{1-2} & 00\ 2 & \end{array}$$

Como no tenemos más cifras para bajar en el dividendo entonces damos por terminado el proceso.

En esta operación observamos que el dividendo es 450, el divisor es 28, el cociente es 16 y el residuo es 2. Decimos que la división es inexacta (porque su residuo es diferente de cero) y podemos probarla verificando la igualdad:

$$Cociente \times Divisor + Residuo = Dividendo$$

Veamos:

$$16 \times 28 + 2 = 450$$
$$448 + 2 = 450$$
$$450 = 450$$

El hecho de que la igualdad se cumpla, nos da la tranquilidad de haber resuelto correctamente la división.

Por lo tanto, a cada estudiante le corresponden 16 bombones y a la maestra Jaramillo le sobran 2 unidades.

Lección 15

Polinomios aritméticos sin signos de agrupación

Hasta el momento hemos visto, una por una, las cuatro operaciones básicas con números naturales (suma, resta, multiplicación y división) así como las propiedades o "reglas de juego" que se cumplen en la suma y en la multiplicación. Ahora veremos cómo proceder cuando se nos presentan estas operaciones combinadas en un mismo ejercicio.

Antes de comenzar, es preciso definir dos conceptos matemáticos:

- Signos de agrupación: son símbolos que, como su nombre lo indican, se utilizan en matemáticas para agrupar o asociar cantidades. Son ellos: los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { }.

- Polinomio aritmético: es una expresión matemática conformada por un conjunto finito de números, conectados entre sí por las diferentes operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división).

Entonces, en esta y la siguiente clase, vamos a ver cómo se resuelven "polinomios aritméticos sin signos de agrupación" y "polinomios aritméticos con signos de agrupación". Como podemos notar, sus nombres obedecen a la ausencia o presencia de esos signos en la expresión.

Comenzamos con los "polinomios aritméticos sin signos de agrupación", aquellos donde no hay paréntesis, corchetes ni llaves. A continuación veremos diferentes situaciones que pueden presentarse.

Ejemplo 15.1

Resolver: $8+7-6-2+3-4$.

Solución

En esta ocasión tenemos solamente dos operaciones: suma y resta. Entonces procedemos de izquierda a derecha, operando siempre los dos primeros números del polinomio en cada paso (lo demás se vuelve a escribir, dejándolo tal como está). Veamos la secuencia:

$$\begin{aligned} 8+7-6-2+3-4 &= 15-6-2+3-4 \\ &= 9-2+3-4 \\ &= 7+3-4 \\ &= 10-4 \\ &= 6\,. \end{aligned}$$

Como se puede observar, es importante conservar la secuencia ordenada, es decir el paso a paso del desarrollo del ejercicio. De esa manera minimizamos el riesgo de equivocarnos y por ende avanzamos con seguridad hacia la respuesta correcta.

Ejemplo 15.2

Resolver: $4 \times 5 \div 2 \times 6 \div 3 \div 10$.

Solución

Esta vez también tenemos dos operaciones: multiplicación y división. De nuevo vamos resolviendo de izquierda a derecha, operando los dos primeros números que tenemos en cada paso del desarrollo del ejercicio (todo lo demás se vuelve a escribir, sin modificar nada). Veamos la secuencia correspondiente:

$$\begin{aligned} 4 \times 5 \div 2 \times 6 \div 3 \div 10 &= 20 \div 2 \times 6 \div 3 \div 10 \\ &= 10 \times 6 \div 3 \div 10 \\ &= 60 \div 3 \div 10 \\ &= 20 \div 10 \\ &= 2\ . \end{aligned}$$

Ejemplo 15.3

Resolver: $2 + 3 \times 7 - 45 \div 9 - 6$.

Solución

Aquí tenemos las cuatro operaciones y debemos tener en cuenta que, en matemáticas, la multiplicación y la división son operaciones de mayor jerarquía o importancia que la suma y la resta. Entonces, atendiendo ese orden en las operaciones, primero resolvemos las multiplicaciones y divisiones, y después las sumas y restas de izquierda a derecha (como vimos en el ejemplo 15.1). Veamos paso a paso el desarrollo de este polinomio aritmético:

$$\begin{aligned} 2 + 3 \times 7 - 45 \div 9 - 6 &= 2 + 21 - 5 - 6 \\ &= 23 - 5 - 6 \\ &= 18 - 6 \\ &= 12\ . \end{aligned}$$

Ejemplo 15.4

Resolver: $32 - 75 \div 3 - 28 \div 14 + 13 \times 2 - 24 \div 8$.

Solución

De nuevo tenemos las cuatro operaciones. Al igual que en el ejemplo anterior, primero efectuamos las multiplicaciones y divisiones, y después las sumas y restas de izquierda a derecha (como en el ejemplo 15.1). Veamos el desarrollo detallado de este polinomio aritmético:

$$
\begin{aligned}
32 - 75 \div 3 - 28 \div 14 + 13 \times 2 - 24 \div 8 &= 32 - 25 - 2 + 26 - 3 \\
&= 7 - 2 + 26 - 3 \\
&= 5 + 26 - 3 \\
&= 31 - 3 \\
&= 28 \ .
\end{aligned}
$$

Ejemplo 15.5

Resolver: $8 \div 2 \times 7 - 5 \times 6 \div 3 - 54 \div 9 + 11 \times 2$.

Solución

Otra vez tenemos las cuatro operaciones. Tal como en los dos ejemplos anteriores, primero se deben resolver las multiplicaciones y divisiones, y luego las sumas y restas. Como se observa, hay dos tríos de números conectados entre sí por los signos de multiplicación y división, que son $8 \div 2 \times 7$ y $5 \times 6 \div 3$; entonces allí debemos proceder como vimos en el ejemplo 15.2 (de izquierda a derecha): $8 \div 2 \times 7 = 4 \times 7 = 28$ y $5 \times 6 \div 3 = 30 \div 3 = 10$. Posteriormente, efectuamos las sumas y restas como vimos en el ejemplo 15.1 (también de izquierda a derecha). Veamos en detalle el desarrollo de esta situación:

$$
\begin{aligned}
8 \div 2 \times 7 - 5 \times 6 \div 3 - 54 \div 9 + 11 \times 2 &= 28 - 10 - 6 + 22 \\
&= 18 - 6 + 22 \\
&= 12 + 22 \\
&= 34 \ .
\end{aligned}
$$

Lección 16

Polinomios aritméticos con signos de agrupación

Los polinomios aritméticos con signos de agrupación son aquellos donde hay presencia de paréntesis ( ), corchetes [ ] o llaves { }. El procedimiento que se recomienda para resolver este tipo de polinomios aritméticos es el siguiente:

- Primero resolvemos lo que hay dentro de los paréntesis;
- Destruimos los paréntesis;
- Luego efectuamos lo que hay dentro de los corchetes;

  - Destruimos los corchetes;

  - Enseguida resolvemos lo que hay dentro de las llaves;

  - Destruimos las llaves;

  - Finalmente resolvemos las operaciones que quedan, aplicando lo que vimos en la clase anterior.

Como se observa, el procedimiento indica que debemos comenzar con los paréntesis, que son los signos de agrupación de menor importancia; luego debemos continuar con los corchetes y por último nos encargamos de las llaves, que son los signos de agrupación de mayor jerarquía.

En síntesis, debemos avanzar en el orden: paréntesis $\rightarrow$ corchetes $\rightarrow$ llaves para resolver correctamente un polinomio aritmético con signos de agrupación.

Veamos diferentes situaciones que ilustran lo anterior.

Ejemplo 16.1

Resolver: $14 - (17 - 10) + 8 \times (3 + 6) - (18 \div 2 - 5)$.

Solución

En los dos primeros paréntesis, los resultados son inmediatos: $17 - 10 = 7$ y $3 + 6 = 9$. En el tercer paréntesis respetamos la jerarquía de las operaciones: $18 \div 2 - 5 = 9 - 5 = 4$. Nos queda entonces:

$$14 - (17 - 10) + 8 \times (3 + 6) - (18 \div 2 - 5) = 14 - (7) + 8 \times (9) - (4)\ .$$

Ahora destruimos los paréntesis:

$$14 - (17 - 10) + 8 \times (3 + 6) - (18 \div 2 - 5) = 14 - 7 + 8 \times 9 - 4\ .$$

Enseguida resolvemos el polinomio sin signos de agrupación al que hemos llegado:

$$\begin{aligned} 14 - (17 - 10) + 8 \times (3 + 6) - (18 \div 2 - 5) &= 14 - 7 + 72 - 4 \\ &= 7 + 72 - 4 \\ &= 79 - 4 \\ &= 75 \ . \end{aligned}$$

Ejemplo 16.2

Resolver: $27 \div (31 - 22) - (9 \times 5 - 88 \div 2) + 7 \times (3 + 12 \div 6)$.

Solución

En el primer paréntesis, el resultado es inmediato: $31 - 22 = 9$. En el segundo y en el tercer paréntesis debemos respetar el orden de las operaciones, así: para el caso del segundo tenemos $9 \times 5 - 88 \div 2 = 45 - 44 = 1$ y, en el tercero, nos queda $3 + 12 \div 6 = 3 + 2 = 5$.

Tendremos entonces:

$$27 \div (31 - 22) - (9 \times 5 - 88 \div 2) + 7 \times (3 + 12 \div 6) = 27 \div (9) - (1) + 7 \times (5) \ .$$

A continuación destruimos los paréntesis:

$$27 \div (31 - 22) - (9 \times 5 - 88 \div 2) + 7 \times (3 + 12 \div 6) = 27 \div 9 - 1 + 7 \times 5 \ .$$

Y resolvemos el polinomio aritmético sin signos de agrupación al que hemos llegado:

$$\begin{aligned} 27 \div (31 - 22) - (9 \times 5 - 88 \div 2) + 7 \times (3 + 12 \div 6) &= 3 - 1 + 35 \\ &= 2 + 35 \\ &= 37 \ . \end{aligned}$$

Ejemplo 16.3

Resolver: $16 - [8 \times (12 - 7) - 72 \div 2] - (20 - 6 \times 3)$.

Solución

Comenzamos efectuando las operaciones que hay dentro de los paréntesis. En el primero, el resultado es inmediato: $12 - 7 = 5$ y, en el segundo, resolvemos de acuerdo con el orden de las operaciones: $20 - 6 \times 3 = 20 - 18 = 2$. Entonces tenemos:

$$16 - [8 \times (12 - 7) - 72 \div 2] - (20 - 6 \times 3) = 16 - [8 \times (5) - 72 \div 2] - (2) \ .$$

Enseguida destruimos los paréntesis:

$$16 - [8 \times (12 - 7) - 72 \div 2] - (20 - 6 \times 3) = 16 - [8 \times 5 - 72 \div 2] - 2 \ .$$

Ahora realizamos las operaciones que hay dentro de los corchetes, siguiendo el orden de las mismas:

$$\begin{aligned} 16 - [8 \times (12 - 7) - 72 \div 2] - (20 - 6 \times 3) &= 16 - [40 - 36] - 2 \\ &= 16 - [4] - 2 \ . \end{aligned}$$

Luego eliminamos los corchetes:

$$16 - [8 \times (12 - 7) - 72 \div 2] - (20 - 6 \times 3) = 16 - 4 - 2$$

Y finalmente, resolvemos las operaciones que quedaron:

$$\begin{aligned} 16 - [8 \times (12 - 7) - 72 \div 2] - (20 - 6 \times 3) &= 12 - 2 \\ &= 10 \ . \end{aligned}$$

Ejemplo 16.4

Resolver: $\{31 - [17 \times (23 - 20) - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23$.

Solución

Iniciamos realizando la operación que tenemos dentro del paréntesis:

$$\{31 - [17 \times (23 - 20) - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23 = \{31 - [17 \times (3) - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23 \ .$$

Luego, destruimos los paréntesis:

$$\{31 - [17 \times (23 - 20) - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23 = \{31 - [17 \times 3 - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23 \ .$$

Pasamos ahora a efectuar las operaciones que hay dentro de los corchetes, respetando el orden de las mismas:

$$\begin{aligned} \{31 - [17 \times (23 - 20) - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23 &= \{31 - [51 - 25] + 9 \times 2\} \div 23 \\ &= \{31 - [26] + 9 \times 2\} \div 23 \ . \end{aligned}$$

Enseguida, eliminamos los corchetes:

$$\{31 - [17 \times (23 - 20) - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23 = \{31 - 26 + 9 \times 2\} \div 23 \ .$$

Luego resolvemos, una por una, las operaciones que tenemos dentro de las llaves:

$$\begin{aligned} \{31 - [17 \times (23 - 20) - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23 &= \{31 - 26 + 18\} \div 23 \\ &= \{5 + 18\} \div 23 \\ &= \{23\} \div 23 \ . \end{aligned}$$

Destruimos las llaves y después realizamos la operación que quedó:

$$\begin{aligned} \{31 - [17 \times (23 - 20) - 150 \div 6] + 9 \times 2\} \div 23 &= 23 \div 23 \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

Lección 17

Problemas con combinación de operaciones (Parte I)

Existen diversas situaciones problema que involucran números naturales y donde es necesario aplicar las operaciones que hemos visto, para responder a lo que allí se pide.

Para resolver este tipo de problemas (que generalmente corresponden a situaciones de la vida cotidiana) primero debemos leer con atención el enunciado, tantas veces como sea necesario, para comprender muy bien la información que nos dan y lo que nos preguntan. Aquí es cuando la comprensión de lectura juega un papel muy importante en el estudio de las matemáticas, pues es la etapa en que identificamos los datos que proporciona el problema y las operaciones que debemos efectuar con ellos.

Luego viene la fase operativa, es decir el momento de realizar cuidadosamente las operaciones, interpretando al mismo tiempo cada resultado que obtenemos.

Por último, damos la respuesta. Esto se hace redactando una corta frase donde va la información que se ha solicitado en la pregunta (o preguntas) del problema.

En esta y la siguiente clase veremos ejemplos de situaciones problema donde participan las operaciones básicas con números naturales.

Ejemplo 17.1

Manuel tiene 150 canicas y obsequia las siguientes cantidades a dos de sus amigos: 35 para Luis y 48 para César. ¿Cuántas canicas le quedan a Manuel?

Solución

En este problema debemos efectuar dos operaciones: una suma, para determinar la cantidad total de canicas que Manuel regaló a sus amigos, y después una resta para saber cuántas canicas le quedaron.

Entonces comenzamos con la suma:

$$35 + 48 = 83 \text{ (Manuel obsequió 83 de sus canicas)} .$$

Ahora hacemos la resta:

$$150 - 83 = 67 .$$

A Manuel le quedan 67 canicas.

Ejemplo 17.2

Javier tenía \$10.000 y compró 3 bolsas de leche a \$2.350 cada una. ¿Cuánto dinero le sobró?

Solución

En este problema debemos efectuar dos operaciones: una multiplicación para saber cuánto costó la leche y una resta para determinar cuánto dinero le sobró a Javier.

Comenzamos con la multiplicación:

$$3 \times 2.350 = 7.050 \text{ (las tres bolsas de leche costaron \$7.050).}$$

Enseguida hacemos la resta:

$$10.000 - 7.050 = 2.950 \; .$$

Después de comprar la leche, a Javier le sobraron \$2.950.

Ejemplo 17.3

Al destapar su alcancía, Laura realiza el siguiente conteo de monedas: 56 de \$100, 37 de \$200 y 44 de \$500. ¿Cuánto dinero ahorró Laura en su alcancía?

Solución

En este problema debemos realizar cuatro operaciones: tres multiplicaciones para determinar cuánto dinero hay representado en cada tipo de moneda, y una suma para hallar el total de dinero que Laura ahorró en su alcancía.

Comenzamos con las multiplicaciones:

$$\begin{aligned}
&56 \times 100 = 5.600 \quad \text{(En monedas de \$100 reunió \$5.600)} \; , \\
&37 \times 200 = 7.400 \quad \text{(En monedas de \$200 reunió \$7.400)} \; , \\
&44 \times 500 = 22.000 \quad \text{(En monedas de \$500 reunió \$22.000)} \; .
\end{aligned}$$

Ahora hacemos la suma de las cantidades anteriores:

$$5.600 + 7.400 + 22.000 = 35.000 \; .$$

En su alcancía, Laura ahorró \$35.000.

Ejemplo 17.4

Se contratan 6 buses con capacidad de 23 puestos cada uno para transportar 114 estudiantes a un paseo. Además, en cada bus deben viajar 3 profesores y todas las personas tienen que ir sentadas. ¿Se ocupan todos los puestos? Si no es así, ¿Cuántos quedan libres?

Solución

En este problema debemos realizar cinco cosas: dos multiplicaciones (una para saber cuál es el total de puestos disponibles y otra para conocer cuántos profesores van al paseo); una suma para establecer el total de personas transportadas; una comparación de cantidades para determinar si quedan puestos libres (“puestos disponible” versus “personas transportadas”);

y, en caso de ser afirmativa la respuesta, una resta para determinar cuántos puestos quedan sin ocupar.

Comenzamos con la multiplicación que nos permite saber cuántos puestos hay en los buses:

$$6 \times 23 = 138 \quad \text{(en total hay 138 puestos disponibles)} \ .$$

Ahora hacemos la otra multiplicación, para determinar cuántos profesores acompañan a los estudiantes al paseo:

$$3 \times 6 = 18 \quad \text{(18 profesores van en los buses)} \ .$$

Enseguida hacemos la suma que nos permite conocer el total de personas transportadas (estudiantes + profesores):

$$114 + 18 = 132 \quad \text{(en total se van a transportar 132 personas)} \ .$$

Luego comparamos las cantidades "puestos disponibles" versus "personas transportadas", es decir 138 vs. 132. Como hay más puestos que personas (porque 138 es mayor que 132, o sea $138 > 132$) entonces quiere decir que sí quedan puestos disponibles. En consecuencia, hacemos la resta para precisar la cantidad de cupos libres en los buses:

$$138 - 132 = 6 \ .$$

En el transporte de las personas al paseo no se ocupan todos los puestos de los buses; 6 quedan sin ocupar.

Lección 18

Problemas con combinación de operaciones (Parte II)

Continuamos con el tema de la clase anterior, mirando en esta ocasión otros ejemplos de situaciones problema donde se aplican las operaciones básicas con números naturales.

Ejemplo 18.1

En una ferretería hay dos rollos de alambre: uno de 500 metros y otro de 350 metros. Si un cliente necesita tramos de 8 metros, ¿Cuántos puede conseguir en esa ferretería? Si cada tramo cuesta $1.300, ¿Cuánto debe pagar por ellos?

Solución

En este problema debemos realizar cuatro operaciones: dos divisiones, para establecer cuántos tramos de 8 metros resultan de cada rollo de alambre; una suma, para hallar el total de tramos que se obtienen; y, una multiplicación, para saber cuánto debe pagar el cliente por esas piezas de alambre.

Comenzamos con las divisiones:

Al efectuar la división $500 \div 8$ (debe realizarse el procedimiento a mano) obtenemos 62 como cociente y 4 como residuo, luego es una división inexacta. Esto significa que del rollo de 500 metros se pueden obtener 62 tramos de 8 metros y queda sobrando un pedazo de alambre de 4 metros.

Al resolver la división $350 \div 8$ (también haciendo el procedimiento a mano) tenemos cociente 43 y residuo 6, es decir otra división inexacta. Significa esto que del rollo de 350 metros resultan 43 tramos de 8 metros y sobra un pedazo de 6 metros de alambre.

Luego realizamos la suma:

$$62 + 43 = 105 \quad \text{(El cliente va a recibir un total de 105 tramos de 8 metros)}\ .$$

Finalmente, hacemos la multiplicación:

$$105 \times 1.300 = 136.500 \quad \text{(El cliente debe pagar \$136.500)}\ .$$

En esa ferretería, el cliente puede conseguir 105 tramos de alambre, de 8 metros cada uno. Por ellos debe pagar $136.500.

Ejemplo 18.2

En un almacén de camisas se hace el conteo de las existencias por tallas. Los resultados son los siguientes:

Talla de camisa	Cantidad de estantes	Número de camisas en cada estante
S	5	85
M	6	94
L	4	72
XL	2	49

¿Cuántas camisas hay disponibles en el almacén?

Solución

En este problema debemos realizar cinco operaciones: cuatro multiplicaciones, para determinar cuántas camisas hay por cada talla; y, una suma para establecer el total de camisas disponibles en el almacén.

Comenzamos con las multiplicaciones:

$$5 \times 85 = 425 \quad \text{(hay 425 camisas talla S)} \ .$$
$$6 \times 94 = 564 \quad \text{(hay 564 camisas talla M)} \ .$$
$$4 \times 72 = 288 \quad \text{(hay 288 camisas talla L)} \ .$$
$$2 \times 49 = 98 \quad \text{(hay 98 camisas talla XL)} \ .$$

Ahora efectuamos la suma:

$$425 + 564 + 288 + 98 = 1.375 \ .$$

En el almacén hay 1.375 camisas disponibles.

Ejemplo 18.3

Si pagamos \$25.550 por tres libras de papa y cuatro libras de carne, y sabemos que cada libra de papa cuesta \$850, ¿Cuánto vale una libra de carne?

Solución

En este problema debemos realizar tres operaciones: una multiplicación, para saber cuánto cuestan las tres libras de papa; una resta, para determinar cuánto cuesta la carne; y, una división, para establecer el precio de una libra de carne.

Comenzamos con la multiplicación:

$$3 \times 850 = 2.550 \quad \text{(las tres libras de papa cuestan \$2.550)} \ .$$

Luego, efectuamos la resta:

$$25.550 - 2.550 = 23.000 \quad \text{(las cuatro libras de carne cuestan \$23.000)} \ .$$

Finalmente, hacemos la división:

$$23.000 \div 4 = 5.750 \quad \text{(es una división exacta)} \ .$$

El valor de una libra de carne es \$5.750.

Ejemplo 18.4

Un terreno rectangular tiene 50 metros de largo y 30 metros de ancho. Se desea cercar con malla sostenida por postes colocados cada 5 metros. Si cada poste cuesta \$9.500 y cada metro de malla cuesta \$13.450, ¿Cuál será el costo de la cerca?

Solución

En este problema debemos hacer cinco operaciones: una suma, para determinar la longitud total de cerca necesaria; una división, para establecer cuántos postes se necesitan; dos multiplicaciones, para conocer el costo de los postes y de la malla; y, una suma, para saber cuál es el costo total de la cerca.

Comenzamos con la suma:

$$50+30+50+30=160 \quad \text{(la longitud total de cerca necesaria es 160 metros,}$$
$$\text{que corresponde al perímetro del rectángulo).}$$

Luego realizamos la división:

$$160 \div 5 = 32 \quad \text{(se necesitan 32 postes, separados entre sí 5 metros).}$$

Después efectuamos las multiplicaciones:

$$32 \times 9.500 = 304.000 \quad \text{(los 32 postes cuestan \$304.000).}$$
$$160 \times 13.450 = 2.152.000 \quad \text{(los 160 metros de malla cuestan \$2.152.000).}$$

Finalmente, hacemos la suma:

$$304.000 + 2.152.000 = 2.456.000\ .$$

El costo total de la cerca para el terreno rectangular es \$2.456.000.

Lección 19

Múltiplos y divisores

Los múltiplos y divisores de un número natural son dos conceptos de gran importancia no sólo en el estudio de la aritmética sino también en otros campos más avanzados de las matemáticas.

A continuación veremos ejemplos de cómo se obtienen los múltiplos y divisores de algunos números naturales, y después vamos a establecer la definición y las características más importantes de estos dos conceptos, para diferenciarlos muy bien.

Ejemplo 19.1

Comenzamos con el primer número natural que es el cero (0). Para obtener su conjunto de múltiplos generamos la tabla de multiplicar del cero:

$$\begin{gathered} 0 \times 0 = 0 \\ 0 \times 1 = 0 \\ 0 \times 2 = 0 \\ 0 \times 3 = 0 \\ 0 \times 4 = 0 \\ \vdots \end{gathered}$$

Como se observa, siempre obtenemos cero (recordemos la propiedad anulativa de la multiplicación: al multiplicar un número natural por cero el resultado es cero). Luego, el conjunto de múltiplos de cero (denotado por M_0) es finito y tiene un solo elemento, que es cero, y por eso es un conjunto unitario:

$$M_0 = \{0\}$$

Para construir el conjunto de divisores de cero debemos considerar aquellos números naturales que dividen exactamente al cero. Encontramos que todos (excepto el cero) cumplen esa condición.

Por ejemplo, 6 es divisor de 0 porque $0 \div 6 = 0$; 17 es divisor de 0 porque $0 \div 17 = 0$; 285 es divisor de 0 porque $0 \div 285 = 0$.

Como decíamos, 0 no es divisor de 0 porque el resultado de la operación $0 \div 0$ no existe. De hecho, cero no es divisor de ningún número natural porque, en matemáticas, la división por cero no está definida.

Entonces, el conjunto de divisores de cero (denotado por D_0) es infinito:

$$D_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\} .$$

Ejemplo 19.2

Veamos ahora el caso del número 1. Para obtener su conjunto de múltiplos construimos la tabla de multiplicar del uno:

$$\begin{array}{c} 1\times 0=0 \\ 1\times 1=1 \\ 1\times 2=2 \\ 1\times 3=3 \\ 1\times 4=4 \\ 1\times 5=5 \\ \vdots \end{array}$$

Los resultados de dicha tabla de multiplicar son los elementos del conjunto de múltiplos de 1 (denotado por M_1):

$$M_1=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\ldots\}\ .$$

Como puede observarse se trata de un conjunto infinito y sus elementos son todos los números naturales. Podemos afirmar entonces que:

$$M_1=\mathbb{N}\ .$$

Por otro lado, el conjunto de divisores de 1 (denotado por D_1) estará formado por aquellos números naturales que dividen exactamente a 1. Realmente, el único número que cumple esta condición es el mismo 1. Luego:

$$D_1=\{1\}\ .$$

Se trata entonces de un conjunto finito y unitario (porque tiene sólo un elemento).

Ejemplo 19.3

Miremos enseguida el caso del número 5. Para obtener el conjunto de múltiplos de 5 (denotado por M_5) generamos la tabla de multiplicar de dicho número:

$$\begin{array}{c} 5\times 0=0 \\ 5\times 1=5 \\ 5\times 2=10 \\ 5\times 3=15 \\ 5\times 4=20 \\ 5\times 5=25 \\ 5\times 6=30 \\ \vdots \end{array}$$

Con los resultados anteriores conformamos el conjunto infinito de los múltiplos de 5:

$$M_5=\{0,5,10,15,20,25,30,\ldots\}\ .$$

Para obtener el conjunto de divisores de 5 (denotado por D_5) consideramos los números naturales menores o iguales que 5 (exceptuando el cero), es decir $1,2,3,4,$ y 5, para examinar uno por uno y ver cuáles dividen exactamente al 5.

Comenzamos con 1: si efectuamos $5 \div 1$ nos da 5, o sea un resultado exacto porque 1 cabe exactamente 5 veces en 5. Por lo tanto, decimos que 1 sí es divisor de 5. Vale la pena aclarar que 1 es divisor de cualquier número natural: 1 es divisor de 9 porque 1 cabe exactamente 9 veces en 9; 1 es divisor de 20 porque 1 cabe exactamente 20 veces en 20; etc.

Ahora vamos a ver si 2 es divisor de 5, efectuando la operación $5 \div 2$. Nos preguntamos si 2 cabe exactamente en 5, para lo cual revisamos la tabla de multiplicar del 2. Como la respuesta es no (porque 5 no aparece en los resultados de dicha tabla de multiplicar) entonces concluimos que 2 no es divisor de 5.

Luego examinamos si 3 es divisor de 5, efectuando la operación $5 \div 3$. De igual forma, al preguntarnos si 3 cabe exactamente en 5 la respuesta es no (acudimos a la tabla de multiplicar del 3 y vemos que 5 no aparece en los resultados). Entonces concluimos que 3 no es divisor de 5.

Después revisamos el 4, para lo cual planteamos la operación $5 \div 4$. Al preguntarnos si 4 cabe exactamente en 5, la respuesta es no (porque en los resultados de la tabla de multiplicar del 4 no tenemos el 5). Concluimos que 4 no es divisor de 5.

Al probar el 5 tenemos que $5 \div 5 = 1$, porque 5 cabe exactamente 1 vez en 5. Luego 5 sí es divisor de 5.

Es preciso destacar que cualquier número natural es divisor de sí mismo: 7 es divisor de 7 porque 7 cabe exactamente 1 vez en 7; 32 es divisor de 32 porque 32 cabe exactamente 1 vez en 32; etc. Entonces tenemos ya dos divisores garantizados para cualquier número natural (distinto de cero): el 1 y el mismo número.

De lo anterior tenemos que el conjunto de divisores de 5 es:

$$D_5 = \{1, 5\} \ .$$

Se trata de un conjunto finito y tiene una característica especial: si trazamos una línea por toda la mitad (donde está la coma), nos quedan dos elementos simétricos con respecto de dicha línea:

$$D_5 = \{1|5\} \ .$$

Si multiplicamos esos elementos entre sí, o sea 1×5, obtenemos como resultado 5. Esta es una manera sencilla de verificar que el conjunto de divisores es correcto y que no hace falta ningún elemento.

Ejemplo 19.4

Veamos ahora el caso del número natural 8. Vamos a determinar sus múltiplos y divisores.

Para conformar el conjunto de múltiplos de 8 (denotado como M_8) generamos la tabla de multiplicar de dicho número:

$$
\begin{gathered}
8 \times 0 = 0 \\
8 \times 1 = 8 \\
8 \times 2 = 16 \\
8 \times 3 = 24 \\
8 \times 4 = 32 \\
8 \times 5 = 40 \\
8 \times 6 = 48 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Con los resultados obtenidos tenemos el conjunto infinito de los múltiplos de 8:

$$M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\}\ .$$

Para hallar los divisores de 8 (conjunto que se denota como D_8) consideramos los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8, o sea los naturales menores o iguales que 8 (sin incluir el cero, porque recordemos que cero no puede ser divisor de ningún número). Como lo mencionamos en el ejemplo anterior, tenemos garantizado que 1 y 8 son divisores de 8.

Ahora revisamos el 2, para lo cual planteamos la operación $8 \div 2$. Como 2 cabe 4 veces en 8 (porque $2 \times 4 = 8$), entonces $8 \div 2 = 4$ (es una división exacta). Concluimos así que 2 sí es divisor de 8. De esto mismo nos damos cuenta que 4 también es divisor de 8, porque 4 cabe 2 veces en 8.

En otras palabras, si $2 \times 4 = 8$ entonces $8 \div 2 = 4$ y $8 \div 4 = 2$, lo que significa que 2 y 4 son, simultáneamente, factores y divisores de 8.

Lo anterior puede generalizarse así: si $a \times b = c$ (donde a, b y c representan números naturales, con a y b diferentes de cero) entonces $c \div a = b$ y $c \div b = a$. Por lo tanto afirmamos que a y b son, al mismo tiempo, factores y divisores de c.

Haciendo la inspecciónn de los demás números $(3, 5, 6$ y $7)$, es decir, planteando las operaciones $8 \div 3, 8 \div 5, 8 \div 6$ y $8 \div 7$, encontramos que son divisiones inexactas. Esto nos permite concluir que de los candidatos $3, 5, 6$ y 7, ninguno es divisor de 8.

En definitiva, el conjunto finito de divisores de 8 nos queda así:

$$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}\ .$$

Nótese que el listado de divisores está organizado en forma ascendente o creciente (es decir de menor a mayor) y esto es algo que se recomienda para hacer la verificación de que dicho conjunto es el correcto.

Si trazamos una línea vertical por toda la mitad nos queda así:

$$D_8 = \{1, 2|4, 8\}\ .$$

Como se observa, tenemos elementos situados simétricamente (o sea en posiciones que se encuentran a igual distancia de la línea que trazamos): 1 es simétrico con 8 y 2 es simétrico con 4. Si multiplicamos esas parejas de números (1×8 y 2×4) vemos que siempre obtenemos como resultado 8, y así verificamos que el conjunto de divisores de 8 está completo. Realmente esto es conveniente hacerlo porque nos da la tranquilidad de haber conformado correctamente el conjunto de divisores de un número natural.

Ejemplo 19.5

Por último, miremos el caso de un número más grande como 36. Vamos a obtener sus múltiplos y divisores.

Comenzamos con el conjunto de múltiplos de 36 (denotado como M_{36}). Construimos entonces la tabla de multiplicar del 36:

$$\begin{gathered} 36 \times 0 = 0 \\ 36 \times 1 = 36 \\ 36 \times 2 = 72 \\ 36 \times 3 = 108 \\ 36 \times 4 = 144 \\ 36 \times 5 = 180 \\ 36 \times 6 = 216 \\ \vdots \end{gathered}$$

Tenemos entonces el conjunto infinito de múltiplos de 36:

$$M_{36} = \{0, 36, 72, 108, 144, 180, \ldots\} \ .$$

Ahora vamos a conformar el conjunto de divisores de 36 (denotado como D_{36}). Esta vez no vamos a escribir los números del 1 al 36, porque son bastantes, sino que vamos a utilizar la generalización que vimos en el ejemplo anterior. Habíamos mencionado que, con toda seguridad, 1 y 36 son divisores de 36; entonces ya tenemos los dos primeros elementos del conjunto D_{36} (1 será el primero y 36 el último de los divisores de 36, ordenados en forma ascendente o creciente).

Pasamos a examinar el 2, y para ello planteamos la división $36 \div 2$. Al resolverla, nos damos cuenta de que es exacta y que el resultado es 18, porque $2 \times 18 = 36$. Entonces 2 y 18 son, simultáneamente, factores y divisores de 36 (con esto incluimos dos nuevos elementos al conjunto D_{36}, que son 2 y 18).

Enseguida revisamos el número 3, planteando la operación $36 \div 3$. Al desarrollarla vemos que es exacta y que su resultado es 12, porque $3 \times 12 = 36$. Con esto decidimos que 3 y 12 son, al mismo tiempo, factores y divisores de 36, con lo que conseguimos dos nuevos elementos para agregar al conjunto D_{36} (que son 3 y 12).

Examinamos luego el número 4, planteando la división $36 \div 4$. Al realizarla su resultado es 9 (división exacta) porque $4 \times 9 = 36$. Concluimos que 4 y 9 son factores y divisores de 36, y así obtenemos dos nuevos elementos para incorporar al conjunto D_{36} (que son 4 y 9).

Ahora hacemos la inspección del 5. Planteamos la división $36 \div 5$ y, como es inexacta (porque 5 no cabe exactamente en 36), decidimos que 5 no es divisor de 36.

Revisamos ahora el número 6, planteando la operación $36 \div 6$. Al efectuarla vemos que se trata de una división exacta cuyo resultado es 6, porque $6 \times 6 = 36$. Esto nos permite concluir que 6 es factor y divisor de 6, con lo que hemos conseguido el elemento que nos hacía falta en el conjunto D_{36} (nos damos cuenta de ello porque al multiplicarse por sí mismo el resultado es 36, o sea el número al que le estamos averiguando los divisores).

En definitiva, el conjunto finito de divisores de 36, ordenados en forma ascendente o creciente, es:

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \; .$$

Hacemos la verificación para tener total tranquilidad de que este conjunto es correcto: trazamos la línea vertical por la mitad (es decir por el 6, de modo que queden igual cantidad de números a ambos lados de la línea):

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6|, 9, 12, 18, 36\} \; .$$

Observamos así los elementos simétricos: 1 con 36, 2 con 18, 3 con 12 y 4 con 9. El número 6 será compañero de sí mismo, ya que justamente por él pasa la línea vertical. Haciendo las multiplicaciones de esas parejas ($1 \times 36, 2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9$ y 6×6) encontramos que siempre nos da 36. Realmente se tratan de las mismas multiplicaciones que hicimos en el proceso para identificar los divisores, pero ahora las tenemos recopiladas en el conjunto D_{36}. De este modo, hemos comprobado que en el conjunto de divisores de 36 no hace falta ningún elemento.

Entonces, con base en lo que realizamos en los ejemplos anteriores, vamos a definir los conceptos de **múltiplos** y **divisores** de un número natural y sus características más importantes:

· Los **múltiplos** de un número natural n diferente de cero ($n \neq 0$) son aquellos en los que n cabe una cantidad exacta de veces, o sea que son números divisibles por n. Forman un conjunto infinito que se denota como M_n y cuyos elementos son los resultados de las operaciones $n \times 0, n \times 1, n \times 2, n \times 3, n \times 4$, etc., es decir los números que obtenemos al generar la tabla de multiplicar de n. Por lo tanto, el primer elemento del conjunto M_n es 0, le sigue n y después números más grandes.

· Los **divisores** de un número natural n diferente de cero ($n \neq 0$) son aquellos que lo dividen exactamente y constituyen un conjunto finito que se denota como D_n. Al organizar los divisores de n en forma ascendente o creciente (es decir de menor a mayor) tenemos un listado de números que siempre comienza con 1 y termina con n (porque todo número natural se puede dividir exactamente por 1 y por él mismo). En ese mismo listado se observan números que son menores o iguales que n y también podemos trazar una línea vertical por la mitad, de modo que haya igual cantidad de números a ambos de ella. Así tenemos elementos simétricos (o situados a igual distancia de la línea) cuyo producto siempre es n. Esta es una manera de verificar que el conjunto D_n está completo. Por otro lado, todos los divisores de un número natural n son al mismo tiempo factores de n.

· Cero es el único número natural que tiene características especiales en cuanto a sus múltiplos y divisores. Como vimos, $M_0 = \{0\}$ y $D_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$. Entonces, a diferencia de los demás números naturales, el conjunto de múltiplos de cero es finito y unitario; y, su conjunto de divisores es infinito (y no lo incluye a él, porque cero no puede ser divisor de ningún número).

Lección 20

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

En esta última clase veremos dos conceptos muy importantes en el estudio de la aritmética y que se aplican en campos más avanzados de las matemáticas. Se trata del MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (conocido como MCM por sus iniciales) y el MÁXIMO COMÚN DIVISOR (conocido como MCD, también por sus iniciales).

A continuación veremos la definición de cada concepto y ejemplos de cómo se determina cada uno.

Mínimo Común Múltiplo (MCM)

El Mínimo Común Múltiplo o MCM de un conjunto finito de números naturales es el número más pequeño (distinto de cero) que cumple con la condición de ser múltiplo de todos ellos.

Una forma de hallar el MCM de varios números naturales es mediante el siguiente procedimiento:

1) Generamos el conjunto de múltiplos de cada número (como vimos en la clase pasada);

2) Identificamos los múltiplos comunes, o sea los elementos que se repiten en todos los conjuntos anteriores, con excepción del cero;

3) Escogemos el menor de los números que identificamos en el paso anterior, y así hallamos el Mínimo Común Múltiplo de los números examinados.

Veamos enseguida dos ejemplos que muestran el procedimiento anterior.

Ejemplo 20.1

Hallar el Mínimo Común Múltiplo de 4 y 6.

Solución

Simbólicamente, este pedido queda así: $MCM(4,6) = ?$

Entonces, comenzamos por generar los conjuntos de múltiplos, de 4 y de 6:

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, \ldots\} \ ,$$
$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, \ldots\} \ .$$

Ahora identificamos los elementos comunes o que se repiten en los dos conjuntos (sin considerar el cero):

$$\text{Múltiplos comunes} = \{12, 24, 36, 48, 60, \ldots\}.$$

Finalmente, escogemos el menor número del listado anterior, es decir 12.

Concluimos que el Mínimo Común Múltiplo de 4 y 6 es 12, lo cual simbólicamente se expresa como:

$$MCM(4, 6) = 12$$

Ejemplo 20.2

Determinar el Mínimo Común Múltiplo de $5, 8$ y 10.

Solución

Simbólicamente, esta solicitud queda así: $MCM(5, 8, 10) =?$

Primero generamos los conjuntos de múltiplos de 5, de 8 y de 10:

$$\begin{aligned} M_5 &= \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, \ldots\}\ , \\ M_8 &= \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, \ldots\}\ , \\ M_{10} &= \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, \ldots\}\ . \end{aligned}$$

Después identificamos los números que se repiten en los tres conjuntos o elementos comunes (sin considerar el cero):

$$\text{Múltiplos comunes} = \{40, 80, \ldots\}.$$

Por último, escogemos el menor número del listado anterior, es decir 40.

Concluimos así que el Mínimo Común Múltiplo de 5, 8 y 10 es 40, lo cual simbólicamente se expresa como:

$$MCM(5, 8, 10) = 40\ .$$

Máximo Común Divisor (MCD)

El Máximo Común Divisor o MCD de un conjunto finito de números naturales es el número más grande que cumple con la condición de ser divisor de todos ellos.

Una forma de hallar el MCD de varios números naturales es aplicando los siguientes pasos:

1) Determinamos el conjunto de divisores de cada número (tal como vimos en la clase pasada);

2) Identificamos los divisores comunes, es decir los elementos que se repiten en todos los conjuntos anteriores;

3) Elegimos el mayor de los números que identificamos en el paso anterior, y así hallamos el Máximo Común Divisor de los números examinados.

Veamos enseguida dos ejemplos que muestran el procedimiento anterior.

Ejemplo 20.3

Hallar el Máximo Común Divisor de 16 y 24.

Solución

Simbólicamente, este pedido queda así: $MCD(16, 24) =?$

Comenzamos por determinar los conjuntos de divisores de 16 y de 24:

$$D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\} \ ,$$
$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \ .$$

Luego identificamos los elementos comunes o que se repiten en los dos conjuntos anteriores:

$$\text{Divisores comunes} = \{1, 2, 4, 8\}.$$

Finalmente, escogemos el mayor número del listado anterior, es decir 8.

Concluimos que el Máximo Común Divisor de 16 y 24 es 8, lo cual simbólicamente se expresa como:

$$MCD(16, 24) = 8 \ .$$

Ejemplo 20.4

Determinar el Máximo Común Divisor de 18, 45 y 63.

Solución

Simbólicamente, esta solicitud queda así: $MCD(18, 45, 63) =?$

Inicialmente generamos los conjuntos de divisores de 18, de 45 y de 63:

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \ ,$$
$$D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} \ ,$$
$$D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\} \ .$$

Enseguida identificamos los números que se repiten en los tres conjuntos o elementos comunes:

$$\text{Divisores comunes} = \{1, 3, 9\}.$$

Finalmente, escogemos el mayor número del listado anterior, es decir 9.

Concluimos así que el Máximo Común Divisor de 18, 45 y 63 es 9, lo cual simbólicamente se expresa como:

$$MCD(18, 45, 63) = 9 \ .$$

Talleres

Taller 1: Generalidades sobre los números naturales y la operación suma

1. Responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el antecesor de 12?

b. ¿Cuál es el sucesor de 87?

c. ¿Cuál es el consecutivo de 1.253?

d. ¿Cuál es el número natural que consta de 4 decenas, 6 centenas y 7 unidades?

e. ¿Cuál es el número natural que está conformado por 2 unidades de mil, 5 unidades, 3 decenas de mil y 7 decenas?

2. En cada caso escribir dentro del recuadro el símbolo mayor que ($>$), igual a ($=$) o menor que ($<$), según corresponda:

$$68 \square 67 \qquad 763 \square 765$$
$$2.154 \square 2.156 \qquad 857 \square 857$$
$$25.312 \square 25.312 \qquad 54.768 \square 54.678$$

3. Efectuar las siguientes sumas:

a. $12 + 25$.

b. $34 + 58$.

c. $27 + 62$.

d. $215 + 123$.

e. $104 + 743$.

f. $356 + 598$.

g. $480 + 153$.

h. $709 + 191$.

i. $641 + 208$.

j. $807 + 183$.

Taller 2: Aplicaciones y propiedades de la suma

1. Realizar las siguientes sumas:

a. $2.718 + 15.386 + 6.039$.

b. $13.504 + 8.591 + 24.762$.

2. En cada caso escribir dentro del recuadro el símbolo mayor que ($>$), igual a ($=$) o menor que ($<$), según corresponda:

$$128 + 536 \square 375 + 289$$
$$4.861 + 5.627 \square 3.639 + 2.074 + 4.777$$
$$6.580 + 13.009 + 426 \square 3.017 + 16.997$$

3. En un colegio estudian 785 niñas y 832 niños. ¿Cuántos estudiantes hay en total?

4. Una marca de motocicletas cuenta con tres plantas de producción. Las unidades fabricadas en el año 2012 por cada planta se muestran en la siguiente tabla:

Planta	Motocicletas producidas
A	24.682
B	35.295
C	41.016

Si la empresa se había trazado la meta se producir 100.000 unidades en ese año, ¿Se cumplió el objetivo?

5. Identificar la propiedad de la suma que se aplica en cada caso.

a. $23 + (45 + 78) = (23 + 45) + 78$.

b. $527 + 194 = 721$.

c. $1.312 + 849 = 849 + 1.312$.

d. $743 + 0 = 743$.

e. $(36 + 401) + (157 + 96) = (36 + 401 + 157) + 96$.

f. $2.437 + 1.782 + 5.469 = 5.469 + 2.437 + 1.782$.

g. $0 + 12.514 = 12.514$.

h. $8.366 + 19.421 + 14.680 = 42.467$.

Taller 3: La operación resta y sus "préstamos"

1. Resolver los siguientes ejercicios de resta y hacer la prueba correspondiente para comprobarlos. En ningún caso se requiere "pedir prestado".

a. De 9 restar 4.

b. Restar 2 de 6.

c. De 94 restar 51.

d. Restar 36 de 89.

e. De 578 restar 103.

f. Restar 341 de 842.

2. Efectuar los siguientes ejercicios de sustracción y comprobarlos realizando la prueba respectiva. En todos se necesita "pedir prestado" al menos una vez.

a. De 21 restar 9.

b. Restar 18 de 46.

c. De 84 restar 69.

d. Restar 285 de 563.

e. De 830 restar 645.

f. Restar 658 de 900.

3. En cada caso escribir dentro del recuadro el símbolo mayor que (>), igual a (=) o menor que (<), según corresponda:

$$953 - 201 \square 876 - 122$$
$$7.085 - 5.721 \square 6.308 - 4.962$$
$$35.248 - 17.658 \square 43.007 - 25.417$$

4. Un estudiante ha respondido 18 de las 35 preguntas de contiene un examen de inglés. ¿Cuántas preguntas le faltan por responder?

5. En el supermercado Rafael compra artículos por valor de $16.750. Si paga con un billete de $20.000, ¿Cuánto dinero le deben devolver?

Taller 4: La multiplicación por una, por dos y por tres cifras

1. Completar la siguiente tabla como muestra el ejemplo:

Suma	Abreviada en palabras	Abreviada en símbolos	Resultado
$5+5+5+5+5+5$	6 veces 5	6×5	30
$8+8+8+8$			
$9+9+9$			
$6+6+6+6+6+6+6$			
$4+4+4+4+4$			
$2+2+2+2+2+2+2+2+2$			

2. Resolver las siguientes multiplicaciones entre dígitos:

a. $2\times 7=$

b. $5\times 5=$

c. $3\times 9=$

d. $8\times 0=$

e. $1\times 4=$

f. $6\times 3=$

g. $9\times 8=$

h. $7\times 1=$

i. $4\times 2=$

j. $0\times 6=$

3. Resolver las siguientes multiplicaciones por números de una cifra:

a. 31×2.

b. 412×3.

c. 508×6.

d. 725×4.

e. 391×8.

4. Resolver las siguientes multiplicaciones por números de dos cifras:

   a. 458×32.

   b. 107×49.

   c. 795×68.

   d. 1.309×74.

   e. 5.062×96.

5. Resolver las siguientes multiplicaciones por números de tres cifras:

   a. 432×102.

   b. 594×327.

   c. 2.308×625.

   d. 9.775×846.

   e. 13.924×509.

Taller 5: Aplicaciones y propiedades de la multiplicación

1. En cada caso escribir dentro del recuadro el símbolo mayor que (>), igual a (=) o menor que (<), según corresponda:

$$45 \times 7 \;\square\; 104 \times 3$$
$$140 \times 18 \;\square\; 72 \times 35$$
$$4.622 \times 361 \;\square\; 2.809 \times 594$$

2. Si hay 24 apartamentos en cada torre de un conjunto residencial y éste tiene 8 torres, ¿Cuántos apartamentos hay en ese conjunto residencial?

3. La señora Quintero compró 24 rollos de tela para su fábrica de camisetas. Si cada rollo trae 35 metros y cuesta $95.600, ¿Cuántos metros de tela adquirió? ¿Cuánto dinero gastó en esa compra?

4. Identificar la propiedad de la multiplicación que se aplica en cada caso.

a. $4 \times 12 = 12 \times 4$.

b. $28 \times 0 = 0$.

c. $7 \times (9 \times 11) = (7 \times 9) \times 11$.

d. $6 \times (13 + 25) = 6 \times 13 + 6 \times 25$.

e. $15 \times 1 = 15$.

f. $42 \times 9 = 378$.

g. $(32 \times 18) \times (29 \times 47) = 32 \times (18 \times 29) \times 47$.

h. $27 \times (10 - 6 + 5) = 27 \times 10 - 27 \times 6 + 27 \times 5$.

i. $1 \times 314 = 314$.

j. $9.465 \times 287 = 2.716.455$.

k. $63 \times 0 \times 92 = 0$.

l. $398 \times 154 = 154 \times 398$.

Taller 6: La división por una y dos cifras

1. Efectuar las siguientes divisiones por una cifra. En cada caso identificar el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo. Establecer si la división es exacta o inexacta y realizar la prueba para verificar su validez.

a. $8 \div 2$.

b. $7 \div 3$.

c. $29 \div 5$.

d. $84 \div 7$.

e. $213 \div 9$.

f. $296 \div 4$.

g. $570 \div 6$.

h. $471 \div 8$.

2. Resolver las siguientes divisiones por dos cifras. En cada caso identificar el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo. Determinar si la división es inexacta o exacta y hacer la prueba respectiva para comprobar la operación.

a. $5.018 \div 13$.

b. $4.671 \div 24$.

c. $14.265 \div 35$.

d. $32.665 \div 47$.

e. $45.815 \div 62$

Taller 7: La división por tres cifras y aplicaciones de la división en general

1. Resolver las siguientes divisiones por tres cifras. En cada ejercicio identificar el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo. Indicar si la división es exacta o inexacta y realizar la prueba correspondiente para verificar la operación.

a. $71.341 \div 182$.

b. $150.859 \div 257$.

c. $157.048 \div 536$.

d. $290.928 \div 710$.

e. $647.483 \div 948$

2. En cada caso escribir dentro del recuadro el símbolo mayor que ($>$), igual a ($=$) o menor que ($<$), según corresponda:

$$760 \div 8 \square 570 \div 6$$
$$30.747 \div 37 \square 43.264 \div 52$$
$$337.295 \div 805 \square 240.192 \div 576$$

3. Si por un paquete de 6 pilas AAA pagué \$7.950, ¿Cuál es el precio de cada pila?

4. A un supermercado llega un pedido de 640 libras de detergente en polvo. Si el administrador solicita a sus empleados que empaquen ese producto en bolsas de 12 libras, ¿Cuántas bolsas se necesitan? ¿Se logra empacar todo el detergente de esa manera?

5. Si en el año 2012 el señor Pérez pagó \$2.658.660 por la gasolina de su automóvil, ¿Cuál fue el gasto diario por ese concepto? (1 año = 365 días).

Taller 8: Polinomios aritméticos sin signos de agrupación y con signos de agrupación

1. Resolver los siguientes polinomios aritméticos sin signos de agrupación:

   a. $9 + 5 - 2 - 3 + 1 - 6$.

   b. $18 - 7 + 12 + 25 - 8 - 14$.

   c. $9 \times 6 \div 3 \times 4 \div 2 \div 12$.

   d. $48 \div 3 \times 4 \div 8 \div 2 \times 11$.

   e. $27 + 6 \times 5 - 32 \div 2 - 41$.

   f. $8 \times 9 - 63 \div 7 - 39 \div 3 - 4 \times 2$.

   g. $65 - 81 \div 3 - 42 \div 7 + 13 \times 4 - 66 \div 6$.

   h. $105 \div 3 + 17 \times 4 - 30 \div 6 - 15 \times 4 - 10 \div 2$.

   i. $24 \div 3 \times 5 - 7 \times 4 \div 2 + 13 \times 3 - 54 \div 6$.

   j. $16 \times 5 \div 4 - 12 \div 2 \times 3 - 34 \div 17 + 18 \times 6$.

2. Resolver los siguientes polinomios aritméticos con signos de agrupación:

   a. $23 - (13 - 9) + 7 \times (5 + 2) - (36 \div 3 - 10)$.

   b. $52 - 4 \times (18 - 15) - (5 \times 4 - 16) - (70 \div 2 + 1)$.

   c. $38 \div (41 - 22) + 2 \times (6 \times 8 - 55 \div 5) + 3 \times (2 + 21 \div 7)$.

   d. $10 + 14 \div (38 - 31) - (100 \div 4 - 80 \div 5) + 8 \times (7 + 11 \times 3)$.

   e. $29 - [4 \times (47 - 42) - 45 \div 3] - (79 - 8 \times 7)$.

   f. $62 \div 2 - [6 \times (20 - 17) - 9 \div 9] - (8 + 40 \div 10)$.

   g. $\{84 - [25 \times (37 - 34) - 144 \div 2] - 6 \times 4\} \div 19$.

   h. $39 - 108 \div \{41 \times 2 - [16 \times (56 - 13 \times 4) - (3 \times 8 + 2)] - 72 \div 9\}$.

Taller 9: Problemas con combinación de operaciones

Resolver los siguientes problemas:

1. Al iniciar el día, Sofía tiene en su almacén 80 vestidos. Si en la mañana vende 12 y en la tarde vende 19, ¿Cuántos vestidos hay en el almacén de Sofía al final del día?

2. El señor Valencia tenía $20.000 y compró 4 paquetes de galletas a $3.650 cada uno. ¿Cuánto dinero le sobró?

3. La señora García hace la siguiente compra en la tienda: tres libras de arroz, cuatro libras de azúcar y doce huevos. Si la libra de arroz cuesta $1.300, la libra de azúcar $1.100 y cada huevo $350, y la señora paga con un billete de $50.000, ¿Cuánto dinero le devuelven?

4. Al revisar sus ahorros, Isabel realiza el siguiente conteo de dinero: 38 monedas de $200, 29 monedas de $500, 14 billetes de $5.000 y 6 billetes de $20.000. ¿Cuánto tiene ahorrado Isabel?

5. En un almacén de zapatos para hombre hay disponibles 9 estantes con capacidad para 28 pares cada uno. Si llega un pedido compuesto por 3 cajas grandes con 45 pares cada una y 5 cajas medianas con 25 pares cada una, ¿Es posible acomodar en la estantería esos zapatos que llegaron? Si no es así, ¿Cuántos pares quedan por fuera de los estantes?

6. En un granero hay dos bultos de harina de trigo: uno con 430 libras y otro con 380 libras. Si un cliente necesita bolsas de 6 libras, ¿Cuántas puede conseguir en ese sitio? Si cada bolsa cuesta $6.500, ¿Cuánto debe pagar por ellas?

7. De una papelería se despachó el siguiente pedido de cuadernos para una institución educativa:

Tipo de cuaderno	Cantidad de cajas	Número de cuadernos por caja
Cuadriculado de 50 hojas	6	24
Cuadriculado de 100 hojas	8	30
Línea corriente de 50 hojas	10	25
Línea corriente de 100 hojas	15	36

¿Cuántos cuadernos se despacharon de la papelería?

8. Si pagamos \$182.000 por cinco camisetas y cuatro pantalonetas, y sabemos que cada camiseta cuesta \$18.000, ¿Cuál es el precio de cada pantaloneta?

9. En la siguiente tabla se registran los valores de las facturas que llegan a un apartamento en el mes de agosto:

Recibo	Valor
Energía	\$80.420
Acueducto y alcantarillado	\$45.600
Gas domiciliario	\$12.580

Si el apartamento es compartido por tres amigas y han acordado pagar los servicios públicos por igual, ¿Cuánto debe aportar cada una?

10. Un lote rectangular, que tiene 126 metros de largo y 84 metros de ancho, se va a encerrar usando cuatro hiladas de alambre de púas sostenido por postes colocados cada tres metros. Si cada poste cuesta \$15.500 y cada metro de alambre de púas cuesta \$180, ¿Cuál será el costo de la cerca?

Taller 10: Múltiplos y divisores; MCM y MCD

1. Para cada número hallar su conjunto de múltiplos (con diez elementos) y divisores:

a. 4.

b. 6.

c. 10.

d. 18.

e. 20.

f. 24.

g. 27.

h. 32.

i. 40.

j. 54.

2. Determinar el Mínimo Común Múltiplo (MCM) y el Máximo Común Divisor (MCD) para cada conjunto de números.

a. 2 y 8.

b. 5 y 7.

c. 9 y 12.

d. 15 y 20.

e. 18 y 30.

f. $6, 8$ y 9.

g. $3, 6$ y 15.

h. $14, 21$ y 42.

i. $16, 40$ y 48.

j. $27, 54$ y 72.

Bibliografía

▶ M. Acosta, D. Salgado, J. Orjuela, *Herramientas Matemáticas 5*, Editorial Santillana, Colombia, 2003.

▶ N. Arcos, L. Caro, A. Sarria, *Pensar y crear 2*, Editorial Mashco Distribuciones, Colombia, 2003.

▶ S. Arévalo, B. Perafán, *Estrategias en Matemáticas 2*, Editorial Libros & Libros S.A., Colombia, 2012.

▶ A. Baldor, *Aritmética*, Ediciones y Distribuciones Códice S.A., Madrid, 1985.

▶ L. Beltrán, A. Suárez, *Matemáticas 4 con Tecnología Aplicada*, Editorial Prentice-Hall, Colombia, 1999.

▶ J. Bernard, *Estrategias de aprendizaje. Cómo aprender y enseñar estratégicamente en la escuela*, Editorial Bruño, España, 1999.

▶ C. Díaz, J. Calvet, *Cartilla para el desarrollo de procesos matemáticos 2: Proyecto aprendo*, Ediciones S.M., Colombia, 2008.

▶ M. Martínez, *Amigos de las Matemáticas 3*, Editorial Santillana, Colombia, 2006.

▶ Ministerio de Educación Nacional, *Lineamientos curriculares. Matemáticas*, Colombia, 2003.

▶ Ministerio de Educación Nacional, *Estándares básicos de calidad. Matemáticas*, Colombia, 2003.

▶ J. Pozo, M. Pérez, J. Domínguez, M. Gómez, Y. Postigo, *La solución de problemas*, Editorial Aula XXI Santillana, Madrid, 1998.

▶ E. Wittman, G. Müller, *El libro de los números 4*, Editorial Klett, Alemania, 2005.